Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 1

zadania luźne

Zadanie 1. Pokaż, że graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera cyklu nieparzystej długości.

Zadanie 2. Czy prawdziwe jest zdanie: graf jest dwudzielny wtedy i tylko wtedy gdy nie zawiera cyklu indukowanego o nieparzystej długości?

Zadanie 3. Graf G jest spójny.

- Pokaż, że z G można usunąć wierzchołek tak, by G pozostał spójny.
- Załóżmy, że graf G nie posiada „wisienki”, czyli dwóch wierzchołków o stopniu 1 i o wspólnym sąsiedzie. Pokaż, że z G można usunąć dwa sąsiadujące wierzchołki, by pozostał spójny.
- Pokaż, że jeśli G nie jest kliką ani cyklem, to można z niego usunąć dwa niesąsiadujące wierzchołki tak, by pozostał spójny.

Zadanie 4. Pokaż, że każdy graf zawiera cykl lub zawiera ścieżkę o końcach w liściach, lub składa się z samych wierzchołków izolowanych.

Zadanie 5. Czy w każdym grafie spójnym istnieje marszruta, która odwiedza każdą krawędź dokładnie dwa razy?

Zadanie 6. Pokaż, że jeśli w drzewie nie ma wierzchołków stopnia 2, to jest więcej liści niż wierzchołków wewnętrznych.

Zadanie 7. Niech $\mathrm{mindeg}(G)$ będzie minimalnym stopniem wierzchołka w G. Załóżmy, że $\mathrm{mindeg}(G) \geqslant 2$. Pokaż, że w G istnieje cykl długości co najmniej $\mathrm{mindeg}(G) + 1$.

Zadanie 8. Niech G będzie grafem spójnym i niech $\mathrm{mindeg}(G)$ będzie najmniejszym stopniem wierzchołka w G. Pokaż, że jeśli $\mathrm{mindeg}(G) < |G|/2$, to w G istnieje ścieżka długości $2\mathrm{mindeg}(G)$.

Zadanie 9. Spójny graf G ma minimalny stopień $\mathrm{mindeg}(G)$ i średnicę d. Ile może najmniej mieć wierzchołków?

Zadanie 10. Spójny graf G ma maksymalny stopień $\mathrm{maxdeg}(G)$ i średnicę d. Ile może najwięcej mieć wierzchołków?

Zadanie 11. Pokaż, że automorfizm drzewa ma jakiś wierzchołek lub jakąś krawędź jako punkt stały (krawędź może być w drugą stronę).

Zadanie 12. Graf jest k–spójny, jeśli usuwając dowolne $(k-1)$ wierzchołków, graf pozostaje wciąż spójny. Czy istnieje funkcja f taka, że jeśli graf G ma minimalny stopień wierzchołka co najmniej $f(k)$, to jest k–spójny?

Zadanie 13. Czy dla każdego $k \in \mathbb{Z}_+$ istnieje $d(k)$ takie, że jeśli graf G ma średni stopień wierzchołka przynajmniej $d(k)$, to w G można znaleźć podgraf dwudzielny o minimalnym stopniu przynajmniej k?

Zadanie 14. Pokaż, że w grafie k–spójnym o co najmniej $2k$ wierzchołkach istnieje cykl długości co najmniej $2k$.

Zadanie 15. W grafie G średni stopień wierzchołka wynosi $\operatorname{avgdeg}(G) \geqslant 4k$. Pokaż, że G istnieje podgraf H, który jest $(k+1)$–spójny i ma średni stopień wierzchołka $\operatorname{avgdeg}(H) \geqslant \operatorname{avgdeg}(G) - 2k$.

Zadanie 16. Pokaż, że k–regularny graf dwudzielny spójny jest dwuspójny.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 2

skojarzenia, część 1

Zadanie 17. Udowodnij twierdzenie Halla przy pomocy wzoru Tutte–Berge.

Zadanie 18. Udowodnij, że jak warunek Halla zachodzi ze stałą $n \in \mathbb{N}$, tj. w grafie dwudzielnym $G = (V, W, E)$ dla każdego $A \subset V$ zachodzi $|N_G(A)| \geqslant n \cdot |A|$, to da się zrobić bigamię: każdemu $v \in V$ przyporządkować n „żon" w W.

Analogicznie — udowodnij, że jak warunek Halla zachodzi ze stałą $1/n$, to da się zrobić skojarzenie, które kojarzy $1/n$ wierzchołków z V.

Zadanie 19 (Crown Decomposition). Pokaż, że jeśli w grafie G bez wierzchołków izolowanych istnieje pokrycie wierzchołkowe rozmiaru $|V(G)|/(k+1)$, to w grafie G istnieje korona o stopniu ekspansji k, tj.: istnieje podział $V(G)$ na zbiory C, H i R takie, że:

- nie ma krawędzi między C i R,
- każdemu wierzchołkowi $v \in H$ można przyporządkować k prywatnych sąsiadów z C,
- C jest zbiorem niezależnym,
- $H \neq \emptyset$.

Zadanie 20. Podaj przykład grafu spójnego, dowolnie dużego, że warunek Tutte nie zachodzi tylko dla zbioru pustego.

Zadanie 21. Graf nazwiemy krytycznym, jeśli po usunięciu dowolnego wierzchołka ma on doskonałe skojarzenie. W grafie spójnym G każda dwuspójna składowa jest trójkątem, a żaden wierzchołek nie ma stopnia większego niż 4. Pokaż, że G jest krytyczny.

Zadanie 22. Pokaż, że nie ma grafów krytycznych dwudzielnych.

Zadanie 23. Pokaż, że jeśli graf jest krytyczny wtedy i tylko wtedy gdy ma nieparzyście wiele wierzchołków i warunek Tutte nie zachodzi tylko dla zbioru pustego.

Zadanie 24. W spójnym grafie G dla każdej pary wierzchołków u i v istnieje automorfizm π taki, że $\pi(u) = v$ (tj. grupa automorfizmów G jest tranzytywna). Pokaż, że G jest krytyczny lub ma doskonałe skojarzenie.

Zadanie 25. Niech M będzie macierzą $n \times n$, gdzie każdy wiersz i każda kolumna sumuje się do jedynki. Udowodnij, że M jest kombinacją wypukłą macierzy permutacji.

Zadanie 26. Udowodnij, że rodzina podzbiorów zbioru n–elementowego da się ustawić w $\binom{n}{\lceil n/2 \rceil}$ rozłącznych łańcuchów.

Zadanie 27. Kraj o powierzchnii n został podzielony na n województw o powierzchni 1 każde. Dodatkowo, dowódcy wojskowi w tym kraju podzielili kraj na n rejonów strategicznych o powierzchnii 1 każdy. Pokaż, że w kraju można zbudować n lotnisk tak, by każde województwo i każdy rejon miał lotnisko.

Zadanie 28. nk pracowników wydziału jest podzielonych na n komitetów po k osób i na n kół naukowych po k osób każde. Wykaż, że da się wysłać delegację n osób tak, by każdy komitet i każde koło naukowe było reprezentowane.

Zadanie 29. Magik i jego pomocnik robią sztuczkę. Z talii 52 kart widz losuje pięć, po czym daje je pomocnikowi. Pomocnik wybiera jedną kartę i daje ją magikowi. Następnie wybiera kolejną z pozostałych czterech i daje ją magikowi. Powtarza tę czynność jeszcze dwa razy, aż zostanie z jedną kartą. W tym momencie magik zgaduje, jaka karta pozostała pomocnikowi. Pokaż, że tę sztuczkę można zrobić bez użycia magii.

Zadanie 30. Pokaż, że krawędzie grafu dwudzielnego G można pokolorować na $\mathrm{maxdeg}(G)$ kolorów tak, by krawędzie jednego koloru tworzyły skojarzenie.

Zadanie 31. Pokaż, że twierdzenie Halla nie zachodzi dla grafów dwudzielnych o przeliczalnej liczbie wierzchołków.

Zadanie 32. Graf nazwiemy kubicznym jeśli każdy wierzchołek ma stopień dokładnie trzy.

- Pokaż korzystając z twierdzenia Tutte, że w grafach kubicznych bez mostów istnieje doskonałe skojarzenie.
- Pokaż korzystając z charakteryzacji Edmondsa Perfect Matching Polytope, że każda krawędź w grafie kubicznym bez mostów jest w jakimś doskonałym skojarzeniu.
- Pokaż przykład grafu kubicznego z mostem, który nie ma doskonałego skojarzenia.

Zadanie 33. W grafie G jest $2n$ wierzchołków i minimalny stopień wynosi n. Pokaż, że jest doskonałe skojarzenie.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 3

skojarzenia, część 2 oraz algebraiczna teoria grafów

Skojarzenia — remanent

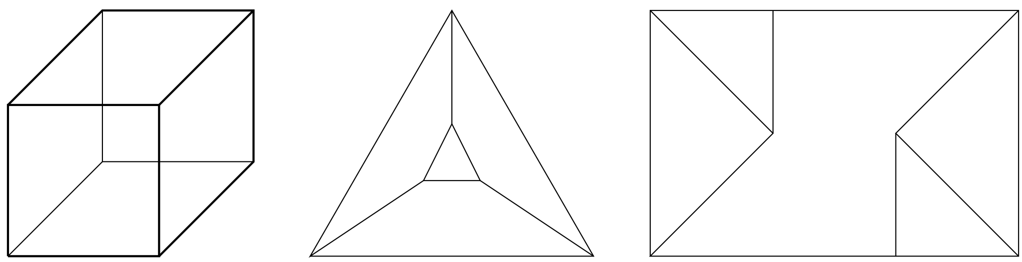
Zadanie 34. Udowodnij, że wymiar PMP jest o co najmniej jeden mniejszy od liczby doskonałych skojarzeń w grafie.

Zadanie 35. Udowodnij twierdzenie Edmondsa dla sum rozłącznych cykli.

Zadanie 36. Udowodnij twierdzenia Halla przy pomocy twierdzenia Tutte–Berge (wskazówka — rozważ oddzielnie te składowe nieparzyste C, dla których $|C \cap V_1| > |C \cap V_2|$, a osobno pozostałe).

Skojarzenia — liczności, rozkład na cegły i klamry

Zadanie 37. Wskaż rozkład na cegły i klamry następujących grafów:



Dla których z tych grafów szacowanie liczby doskonałych skojarzeń z twierdzenia Edmondsa–Lovasza–Pulleybanka jest dokładne?

Zadanie 38. Niech G będzie grafem dwudzielnym pokrytym przez skojarzenia. Udowodnij, że jeśli pewne ciasne cięcie rozbija $V(G)$ na zbiory A i B, to grafy G/A i G/B też są dwudzielne.

Wywnioskuj, że jeśli G jest dowolnym grafem dwudzielnym o przynajmniej dwóch wierzchołkach, to jest w nim przynajmniej $|IE(G)| - |V(G)| + 2$ różnych doskonałych skojarzeń, gdzie $|IE(G)|$ to liczba krawędzi występujących w jakimkolwiek doskonałym skojarzeniu.

Zadanie 39. Pokaż, że ciasne cięcie grafu kubicznego bez mostów zawiera dokładnie trzy krawędzie. Wywnioskuj stąd, że w czasie rozkładu grafu kubicznego bez mostów na cegły i klamry nie wyjdziemy poza klasę grafów kubicznych bez mostów.

Zadanie 40. Graf jest k–spójny krawędziowo, jeśli usunięcie $k-1$ krawędzi go nie rozspójnia. Graf jest cyklicznie k–spójny krawędziowo, jeśli nie da się go rozpójnić usuwając mniej niż k krawędzi na części, z których co najmniej dwie zawierają cykle. Pokaż, że graf kubiczny cyklicznie 4-spójny krawędziowo, który nie jest K_4, jest podwójnie pokryty przez skojarzenia, tj., każda krawędzi należy do co najmniej dwóch doskonałych skojarzeń.

Zadanie 41. Czy istnieje graf pokryty przez skojarzenia, który nie jest dwukrytyczny?

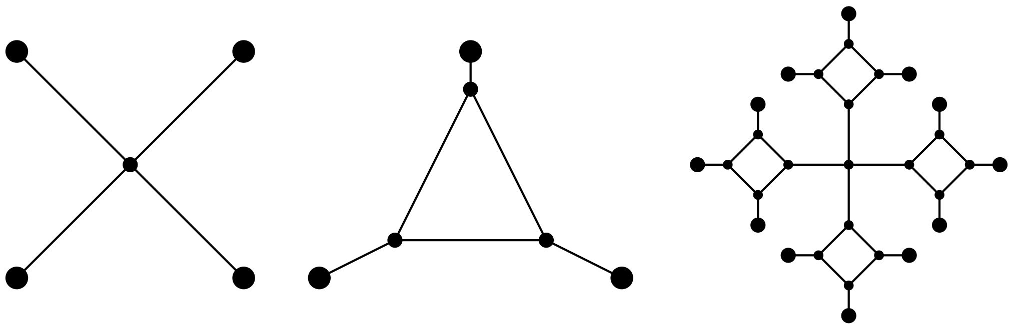
Zadanie 42. Pokaż, że dla każdego n istnieje graf kubiczny G który ma co najmniej n wierzchołków i $2^{|V(G)|/6}$ doskonałych skojarzeń.

Zadanie 43. Klasę klee–grafów definiujemy następująco: K_4 to klee–graf i jeśli G jest klee–grafem, i G' otrzymamy z G poprzez zamianę wierzchołka w trójkąt, to G' też jest klee–grafem. Pokaż, że istnieje dowolnie duży klee–graf G taki, że ma on co najwyżej $2^{|V(G)|/15}$ doskonałych skojarzeń.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 4

Ekspandery, część 1

Zadanie 44. (remanent z tw. Madera) Znajdź “optymalny” podział Madera (tj. taki podział $U_0, U_1, \dots, U_n$, dla którego istnieje $\mu(U_0, U_1, \dots, U_n)$ rozłącznych $\mathcal{S}$–ścieżek) dla następujących grafów (wszystkie zbiory $X \in \mathcal{S}$ są jednoelementowe, ich elementy są zaznaczone na obrazkach większymi kołami):



Algebraiczna teoria grafów

Zadanie 45. Udowodnij, że macierz sąsiedztwa grafu d–regularnego ma wartość własną d. Udowodnij, że jest to największa wartość własna macierzy grafu G.

Zadanie 46. Niech G będzie grafem d–regularnym. Udowodnij, że G jest niespójny wtw. ma wględną przerwę spektralną zero wtw. ma ekspansję krawędziową zero. Udowodnij, że jeśli G jest spójny, to jest dwudzielny wtw. ma bezwzględną przerwę spektralną zero wtw. ma ekspansję wierzchołkową zero.

Czy istnieje podobna charakteryzacja grafów niespójnych lub dwudzielnych przez wartości własne (jakiejś macierzy), jeśli nie założymy regularności grafu?

Produkty grafów

Będziemy w przyszłości konstruowali rodziny grafów. Do tego przydadzą nam się następujące dwa konstrukty grafowe:

Jeśli A i B to dowolne grafy, to ich produktem kartezjańskim $A \square B$ nazywamy graf o zbiorze wierzchołków $V(A) \times V(B)$, oraz krawędziach $(uv)(u'v')$ jeśli $u = u'$ i $vv' \in E(B)$ lub $v = v'$ i $uu' \in E(A)$.

Jeśli A i B to dowolne grafy, to ich produktem tensorowym $A \times B$ nazywamy graf o zbiorze wierzchołków $V(A) \times V(B)$, oraz krawędziach $(uv)(u'v')$ jeśli $uu' \in E(A)$ i $vv' \in E(B)$.

Warto zauważyć, że notacja jest fajna, bo znaczek $\square$ na iloczyn kartezjański oraz $\times$ na iloczyn tensorowy obydwa pokazują, co się dzieje z dwoma krawędziami (jedną z A, drugą z B).

Zadanie 47. Niech A, B, C będą grafami, przy czym A i B są dwudzielne. Które z następujących grafów muszą być dwudzielne: $A \times B$, $A \times C$, $A \square B$, $A \square C$?

Zadanie 48. Czy produkt kartezjański grafów spójnych musi być spójny? Czy produkt tensorowy grafów spójnych musi być spójny?

Zadanie 49. Skonstruuj produkty kartezjański i tensorowy grafów C_4 i S_4 (czyli cyklu o 4 wierzchołkach oraz gwiazdy o jednym środku i trzech liściach).

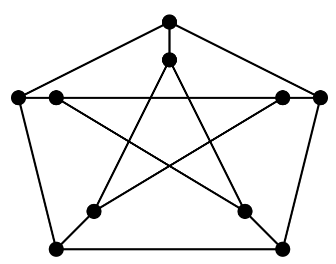
Zadanie 50. Znajdź wszystkie grafy spójne G, dla których G^2 jest dwudzielny po usunięciu pętli.

Obliczanie spektrum i ekspansji

Zadanie 51. Udowodnij, że:

- Jeśli A jest dowolną macierzą, to wartości własne $A - cI$ to pomniejszone o c wartości własne A;
- Jeśli G jest grafem d–regularnym, to wartości własne dopełnienia to $n-1-d$, $-(\lambda_2+1), -(\lambda_3+1), \ldots, -(\lambda_n+1)$;
- Jeśli G to dowolny graf, to wartości własne G^2 to kwadraty wartości własnych G;
- Wartości własne iloczynu tensorowego grafów G i H to $\lambda_i \mu_j$, gdzie λ_i to wartości własne G, a μ_j to wartości własne H;
- Wartości własne iloczynu kartezjańskiego grafów G i H to $\lambda_i + \mu_j$, gdzie λ_i to wartości własne G, a μ_j to wartości własne H.
- Niech G będzie dowolnym grafem d–regularnym, $d \geqslant 3$. Niech $L(G)$, którego wierzchołkami są krawędzie G, i $ef \in E(L(G))$ jeśli e i f mają wspólny koniec w G. Udowodnij, że wartości własne $L(G)$ to $d - 2 + \lambda_i$, gdzie λ_i to wartości własne G, oraz dodatkowo -2 z krotnością $|E| - |V|$. Wskazówka: $\det(xI - CD) = x^{m-n} \det(xI - DC)$, gdzie C to macierz $m \times n$, a D to macierz $n \times m$.

Zadanie 52. Oblicz ekspansję wierzchołkową i krawędziową oraz pełne spektrum kliki K_n, kostki $\{0,1\}^n$, cyklu C_n oraz bikliki $K_{n,n}$, a także pełne spektrum grafu Petersena:



Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 5

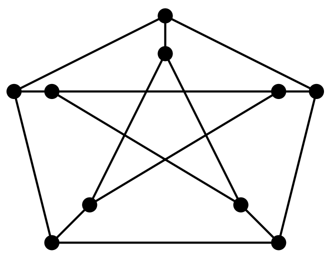
szacowania ekspansji, zygzaki i konstrukcje ekspanderów

obliczanie spektrum i ekspansji — zaległe

Zadanie 53. Udowodnij, że:

- Jeśli A jest dowolną macierzą, to wartości własne $A - cI$ to pomniejszone o c wartości własne A;
- Jeśli G jest grafem d–regularnym, to wartości własne dopełnienia to $n-1-d, -(\lambda_2+1), -(\lambda_3+1), \dots, -(\lambda_n+1)$;
- Jeśli G to dowolny graf, to wartości własne G^2 to kwadraty wartości własnych G;
- Wartości własne iloczynu tensorowego grafów G i H to $\lambda_i \mu_j$, gdzie λ_i to wartości własne G, a μ_j to wartości własne H;
- Wartości własne iloczynu kartezjańskiego grafów G i H to $\lambda_i + \mu_j$, gdzie λ_i to wartości własne G, a μ_j to wartości własne H.
- Niech G będzie dowolnym grafem d–regularnym, $d \geqslant 3$. Niech $L(G)$, którego wierzchołkami są krawędzie G, i $ef \in E(L(G))$ jeśli e i f mają wspólny koniec w G. Udowodnij, że wartości własne $L(G)$ to $d - 2 + \lambda_i$, gdzie λ_i to wartości własne G, oraz dodatkowo -2 z krotnością $|E| - |V|$. Wskazówka: $\det(xI - CD) = x^{m-n} \det(xI - DC)$, gdzie C to macierz $m \times n$, a D to macierz $n \times m$.

Zadanie 54. Oblicz: ekspansję krawędziową kostki $\{0,1\}^n$ oraz pełne spektrum bikliki $K_{n,n}$ i grafu Petersena:



szacowania przerw spektralnych i ekspansji

Zadanie 55. Udowodnij, że jeśli G jest d–regularny i ma przerwę spektralną względną Δ, a bezwzględną Δ', $G \square G$ jest $2d$–regularny i ma tę samą przerwę spektralną względną, oraz bezwzględną tę samą lub lepszą, zaś $G \times G$ jest d^2–regularny i ma bezwzględną przerwę spektralną równą $d\Delta'$.

Zadanie 56. Udowodnij, że graf G^2 jest niespójny wtedy i tylko wtedy, gdy G jest dwudzielny lub niespójny.

Zadanie 57. Niech G będzie dowolnym multigrafem. G' tworzymy dodając w każdym wierzchołku pętlę. Udowodnij, że $\Delta(G) = \Delta(G')$, zaś $\Delta'(G) \geqslant \min\{\Delta(G), 2\}$.

Zadanie 58. Pokaż, że jeśli G jest d–regularny i spójny, to jego względna przerwa spektralna wynosi $\Omega(d^{-1}n^{-2})$. Pokaż, że jeśli go G dostawimy w każdym wierzchołku pętelkę, to jego bezwzględna przerwa spetralna wynosi $\Omega((d+1)^{-3}n^{-2})$.

Zadanie 59. Niech $G = (V, E)$ będzie d–regularnym multigrafem o n wierzchołkach, i niech $\Delta'(G)$ będzie jego bezwzględną przerwą spektralną. Udowodnij, że jego średnica jest nie większa niż $C_{\Delta'} \log n$, gdzie $C_{\Delta'}$ to pewna stała zależna od $\Delta'(G)$.

zadanie obrazkowe

Zadanie 60. Narysuj $K_5 \otimes C_4$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 6

Redukcje losowości

Własności ekspanderów

Zadanie 61. Niech G będzie grafem o względnej przerwie spektralnej Δ, niech $S \subset V(G)$ i $|S| \leqslant |V(G)|/4$. Udowodnij, że $|E(S, S')| \geqslant 4|S|\Delta/3$.

Zadanie 62. (Expander Mixing Lemma) Niech G będzie multigrafem d–regularnym o n wierzchołkach, i niech $\lambda = d - \Delta'(G)$. Udowodnij, że dla dowolnych $S, T \subset V$ zachodzi

$$\Big|E(S,T) - \frac{d|S||T|}{n}\Big| \leqslant \lambda\sqrt{|S||T|}.$$

Zadanie 63. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $d \geqslant 2$ oraz $0 < c < 1$ istnieje taka stała $N(c, d)$, że dla $n > N(c, d)$ każdy graf d–regularny o n wierzchołkach ma bezwzględną przerwę spektralną nie większą niż $d - c\sqrt{d}$.

Błądzenia losowe

Niech $\|u\|_1 = \sum |u_i|$, zaś $\|u\|_2 = \sqrt{\sum |u_i|^2}$.

Zadanie 64. Udowodnij (o ile nie wiesz), że dla dowolnego wektora $u \in \mathbb{R}^n$ zachodzi $\|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|u\|_2 \leqslant \sqrt{n}$. (uwaga — osoby, które nie znają tego faktu mogą z niego korzystać, jest pożyteczny)

Zadanie 65. Niech $S, T \subset V(G)$ będą dowolnymi zbiorami. W pierwszym doświadczeniu wybieramy dwa losowe wierzchołki z $V(G)$, i mówimy, że osiągnęliśmy sukces, jeśli pierwszy należy do S, a drugi do T. W drugim doświadczeniu wybieramy losową krawędź z $E(G)$, kierujemy ją losowo, i mówimy, że osiągnęliśmy sukces, jeśli prowadzi ona z S do T. Udowodnij, że prawdopodobieństwo sukcesu w tych dwóch doświadczeniach nie różni się o więcej niż $1 - \Delta'(G)/d$.

Zadanie 66. Niech $\mathbb{P}$ będzie dowolnym rozkładem prawdopodobieństwa na $V(G)$, gdzie G to graf d–regularny o bezwzględnej przerwie spektralnej $\Delta' = (1 - \alpha)d$. Niech X_0 będzie wierzchołkiem G wybranym zgodnie z prawdopodobieństwem $\mathbb{P}$, oraz niech X_{k+1} będzie losowym sąsiadem wierzchołka X_k (każdego sąsiada wybieramy z równym prawdopodobieństwem). Udowodnij, że

$$\sum_{v \in V(G)} |\mathbb{P}(X_k = v) - 1/n| \leqslant \sqrt{n}\alpha^k \sum_{v \in V(G)} |\mathbb{P}(X_0 = v) - 1/n|.$$

Zadanie 67. Niech $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(Pu)_i = u_i$ dla $i \leqslant k$ i $(Pu)_i = 0$ dla $i > k$ (czyli P zeruje współrzędne dalsze niż k). Udowodnij, że jeśli A macierzą grafu o bezwzględnej przerwie spektralnej Δ', to dla dowolnego wektora v o współczynnikach nieujemnych mamy

$$\frac{\|PAPv\|_2}{d} \leqslant \Big(\frac{k}{n} + \frac{d - \Delta'(G)}{d}\Big)\|v\|_2.$$

Zadanie 68. Niech G będzie grafem d–regularnym o bezwzględnej przerwie spektralnej większej niż $(1-\alpha)d$. Niech $B \subset V(G)$, $|B|/|V| = \beta$. Wybieramy losowy wierzchołek $X_0 \in V(G)$, a następnie wykonujemy t kroków błądzenia losowego. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że $X_i \in B$ dla $i = 0, 1, \ldots, t$ jest nie większe niż $(\alpha+\beta)^t$.

Redukcje losowości

Przypomnijmy, że algorytmem losowym nazwiemy algorytm A, który na wejściu przyjmuje dane x oraz y, gdzie o y myślimy jako o losowej części danych, gdzie x jest podany we względnie dowolny sposób, zaś y to ciąg n bitów. Zakładamy, że istnieje pewna poprawna odpowiedź $C(x) \in \{0, 1\}$.

Mówimy, że A ma błąd jednostronny, jeśli dla x spełniających $C(x) = 0$ zachodzi $A(x, y) = 0$, zaś dla $C(x) = 1$ równość $A(x, y) = 1$ zachodzi dla przynajmniej $\frac{3}{4}2^n$ spośród możliwych y.

Mówimy, że A ma błąd dwustronny, jeśli dla każdego x zbiór tych y, że $C(x) \neq A(x, y)$ ma moc co najwyżej 2^{n-2}.

Zadanie 69. Niech A będzie dowolnym algorytmem losowym z błędem jednostronnym. Skonstruujmy ekspander na 2^n wierzchołkach (które utożsamiamy z możliwymi ciągami y), o stopniu d i bezwzględnej przerwie spektralnej $\Delta' \geqslant 3d/4$. Niech A' będzie algorytmem losowym, który losuje pierwszy ciąg bitów y_0, następnie bierze jako y_k losowego sąsiada y_{k-1}, i zwraca 0, jeśli $A(x, y_i) = 0$ dla wszystkich y, zaś 1, jeśli wśród $A(x, y_i)$ jest przynajmniej jedna jedynka dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że A' jest algorytmem losowym z błędem jednostronnym popełnianym z prawdopodobieństwem co najwyżej 2^{-k}.

Zadanie 70. Jak zaatakować problem błędu dwustronnego?

Zadanie 71. Niech $G = (V, E)$ będzie d–regularnym multigrafem o n wierzchołkach, i niech $\Delta'(G)$ będzie jego bezwzględną przerwą spektralną. Niech $F \subset E$ będzie dowolnym zbiorem krawędzi bez pętli, zaś K — rozkładem prawdopodobieństwa na V zadanym przez wybór losowej krawędzi z F, a potem jej losowego końca. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że błądzenie losowe rozpoczynające wedle K wykona $i+1$–wszy krok krawędzią z F szacuje się z góry przez $\frac{|F|}{|E|} + ((d-\Delta')/d)^i$.

Wskazówki do zadań z ćwiczeń szóstych

Zadanie 61 — przypomnij sobie dowód faktu, że $h_E \geqslant \Delta/2$ (z wykładu czwartego).

Zadanie 62 — zapisz $E(S,T)$ w postaci xAy, przypomnij sobie początek analizy zygzaka

Zadanie 63 — rozważ kwadrat grafu G.

Zadanie 64 — nierówność Schwarza; suma jest mniejsza równa swojej liczności pomnożonej przez największy element.

Zadanie 65 — jedno z poprzednich zadań

Zadanie 66 — rozważ wektor $p_i = \mathbb{P}(X_0 = i)$. Zapisz odpowiednio lewą i prawą stronę.

Zadanie 67 — weź $u = Pv$, przypomnij sobie początek analizy zygzaka

Zadanie 68 — jedno z poprzednich zadań

Zadanie 69 — jedno z poprzednich zadań

Zadanie 70 — standardowym rozwiązaniem jest powtórzenie doświadczenia $2k+1$ razy i wybranie większościowej odpowiedzi. Jak wygląda analiza symulacji tego rozwiązania na ekspanderach?

Zadanie 71 — niech x to startowe rozłożenie na wierzchołkach, zaś y_v to prawdopodobieństwo, że krok z wierzchołka v pójdzie po krawędzi z F. Powiąż y i x, rozłóż x.

Ciut większe wskazówki

Zadanie 61 — rozważ $\mathbf{1}_S A \mathbf{1}_{\bar{S}}$. Zauważ, że $E(S,S) = d|S| - E(S,\bar{S})$.

Zadanie 62 — rozpisz $\mathbf{1}_S A \mathbf{1}_T$, rozłóż każdy wektor na część równoległą i prostopadłą, nierówność Schwarza

Zadanie 63 — rozważ ślad G^2

Zadanie 65 — zadanie 62

Zadanie 66 — zadanie 64

Zadanie 67 — rozłóż Pv na część równoległą i prostopadłą

Zadanie 68 — zadanie 67

Zadanie 69 — zadanie 68

Zadanie 70 — oszacuj prawdopodobieństwo, że wybrany podzbiór będzie błędny, zmodyfikuj zadanie 67, może być potrzebna poprawa prawdopodobieństwa pojedynczego sukcesu.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 7

błądzenia losowe, redukcje losowości, konstrukcje ekspanderów

błądzenia losowe

Zadanie 72. Niech $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $(Pu)_i = u_i$ dla $i \leqslant k$ i $(Pu)_i = 0$ dla $i > k$ (czyli P zeruje współrzędne dalsze niż k). Udowodnij, że jeśli A macierzą grafu o bezwzględnej przerwie spektralnej Δ', to dla dowolnego wektora v o współczynnikach nieujemnych mamy

$$\frac{\|PAPv\|_2}{d} \leqslant \left(\frac{k}{n} + \frac{d - \Delta'(G)}{d}\right) \|v\|_2.$$

Zadanie 73. Niech G będzie grafem d–regularnym o bezwzględnej przerwie spektralnej większej niż $(1-\alpha)d$. Niech $B \subset V(G)$, $|B|/|V| = \beta$. Wybieramy losowy wierzchołek $X_0 \in V(G)$, a następnie wykonujemy t kroków błądzenia losowego. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że $X_i \in B$ dla $i = 0, 1, \ldots, t$ jest nie większe niż $(\alpha + \beta)^t$.

Zadanie 74. Niech $G = (V, E)$ będzie d–regularnym multigrafem o n wierzchołkach, i niech $\Delta'(G)$ będzie jego bezwzględną przerwą spektralną. Niech $F \subset E$ będzie dowolnym zbiorem krawędzi bez pętli, zaś K — rozkładem prawdopodobieństwa na V zadanym przez wybór losowej krawędzi z F, a potem jej losowego końca. Udowodnij, że prawdopodobieństwo, że błądzenie losowe rozpoczynające wedle K wykona $i+1$–wszy krok krawędzią z F szacuje się z góry przez $\frac{|F|}{|E|} + ((d - \Delta')/d)^i$.

redukcje losowości

Przypomnijmy, że algorytmem losowym nazwiemy algorytm A, który na wejściu przyjmuje dane x oraz y, gdzie o y myślimy jako o losowej części danych, gdzie x jest podany we względnie dowolny sposób, zaś y to ciąg n bitów. Zakładamy, że istnieje pewna poprawna odpowiedź $C(x) \in \{0, 1\}$.

Mówimy, że A ma błąd jednostronny, jeśli dla x spełniających $C(x) = 0$ zachodzi $A(x, y) = 0$, zaś dla $C(x) = 1$ równość $A(x, y) = 1$ zachodzi dla przynajmniej $\frac{3}{4}2^n$ spośród możliwych y.

Mówimy, że A ma błąd dwustronny, jeśli dla każdego x zbiór tych y, że $C(x) \neq A(x, y)$ ma moc co najwyżej 2^{n-2}.

Zadanie 75. Niech A będzie dowolnym algorytmem losowym z błędem jednostronnym. Skonstruujmy ekspander na 2^n wierzchołkach (które utożsamiamy z możliwymi ciągami y), o stopniu d i bezwzględnej przerwie spektralnej $\Delta' \geqslant 3d/4$. Niech A' będzie algorytmem losowym, który losuje pierwszy ciąg bitów y_0, następnie bierze jako y_k losowego sąsiada y_{k-1}, i zwraca 0, jeśli $A(x, y_i) = 0$ dla wszystkich y, zaś 1, jeśli wśród $A(x, y_i)$ jest przynajmniej jedna jedynka dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Udowodnij, że A' jest algorytmem losowym z błędem jednostronnym popełnianym z prawdopodobieństwem co najwyżej 2^{-k}.

Zadanie 76. Jak zaatakować problem błędu dwustronnego?

deterministyczna konstrukcja ekspandera

Zadanie 77. Niech F_q będzie ciałem o charakterystyce q. Rozważmy graf G, którego zbiorem wierzchołków jest F_q^2, a krawędź łączy (a, b) z (c, d) jeśli $ac = b + d$.

1. Udowodnij, że wierzchołek (a, b) jest połączony krawędzią z wszystkimi wierzchołkami (c, d) takimi, że (c, d) leży na prostej $ax - b$.

2. Oblicz macierz sąsiedztwa grafu G^2.

3. Oblicz wartości własne tej macierzy.

4. Udowodnij, że G jest ekspanderem o bezwzględnej przerwie spektralnej co najmniej $q - \sqrt{q}$.

Zadanie 78. Pokaż, że istnieją stałe d i c takie, że dla każdego n istnieje graf o dokładnie n wierzchołkach, stopniu dokładnie d i bezwzględnej przerwie spektralnej co najmniej c.

wybrane wskazówki do zadań z ćwiczeń siódmych

Zadanie 72— rozłóż Pv na część równoległą i prostopadłą.

Zadanie 74 — niech x to startowe rozłożenie na wierzchołkach, zaś y_v to prawdopodobieństwo, że krok z wierzchołka v pójdzie po krawędzi z F. Powiąż y i x, rozłóż x.

Zadanie 76 — Standardowym rozwiązaniem jest powtórzenie doświadczenia $2k + 1$ razy i wybranie większościowej odpowiedzi. Jak wygląda analiza symulacji tego rozwiązania na ekspanderach? Oszacuj prawdopodobieństwo, że wybrany podzbiór będzie błędny, zmodyfikuj zadanie 67, może być potrzebna poprawa prawdopodobieństwa pojedynczego sukcesu.

Zadanie 78 — Przypomnij sobie konstrukcję z wykładu: zaczynamy od H, d^8 wierzchołków, d–regularny, po czym robimy $G_1 = H^2$, $G_2 = H \times H$, $G_t = (G_{\lfloor \frac{t-1}{2} \rfloor} \times G_{\lceil \frac{t-1}{2} \rceil})^2 \otimes H$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 8

WQO, minory, treewidth

well–quasi–orderings

Przypomnijmy: porządek częściowy $(X, \leqslant)$ jest WQO, jeśli w każdym nieskończonym ciągu $x_1, x_2, \ldots$ istnieje para indeksów $i < j$, że $w_i \leqslant w_j$.

Zadanie 79. Pokaż, że $(X, \leqslant)$ jest WQO wtedy i tylko wtedy, gdy X nie zawiera nieskończonego antyłańcucha lub nieskończonego ciągu ściśle malejącego.

Zadanie 80. Niech $(X, \leqslant)$ będzie WQO. Pokaż, że w każdym ciągu $(x_1, x_2, \ldots)$ istnieje nieskończony podciąg niemalejący.

Zadanie 81. Weźmy zbiór odcinków $X = \{[a, b] : \ a < b,\ a, b \in \mathbb{N}\}$. Powiemy, że $[a, b] \leqslant [c, d]$ jeśli $b < c$ lub $a = c$ i $b \leqslant d$. Pokaż, że to jest WQO.

relacja bycia minorem

Krata $k \times k$ to graf o k^2 wierzchołkach, indeksowanych parami (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant k$, gdzie (i, j) jest połączone krawędzią z (i', j') wtedy i tylko wtedy gdy $|i-i'|+|j-j'| = 1$.

Zadanie 82. Czy K_4 jest minorem kraty 1000×1000? A czy K_5?

Zadanie 83. Pokaż, że dla każdego grafu planarnego H istnieje takie k, że H jest minorem kraty $k \times k$.

treewidth

Przypomnijmy: dla grafu G dekompozycją drzewową nazwiemy takie drzewo G i rodzinę zbiorów wierzchołków $(V_t)_{t \in T}$, że:

(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$;

(T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in T$, że $u, v \in V_t$;

(T3) dla każdego $v \in V(G)$ zbiór $\{t : v \in V_t\}$ jest spójny w T.

Szerokością dekompozycji nazywamy $\max_{t \in T} |V_t| - 1$. Szerokość drzewiasta (treewidth) grafu to najmniejsza możliwa szerokość dekompozycji.

Zadanie 84. Pokaż, że G jest lasem wtedy i tylko wtedy gdy ma treewidth nie większy niż 1.

Zadanie 85. Ile wynosi treewidth kliki K_n?

W następnych zadaniach zakładamy, że dla danego grafu spójnego G mamy jego dekompozycję drzewową z drzewem T i zbiorami wierzchołków $(V_t)_{t \in T}$.

Zadanie 86 (Diestel, Lemma 12.3.1). Niech t_1t_2 będzie krawędzią i niech T po usunięciu t_1t_2 rozpada się na drzewa T_1 i T_2. Pokaż, że $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ rozdziela $U_1 := \bigcup_{t \in T_1} V_t$ od $U_2 := \bigcup_{t \in T_2} V_t$.

Zadanie 87. Pokaż odwrotność poprzedniego zadania: jeśli T jest drzewem, i $(V_t)_{t \in T}$ rodziną podzbiorów $V(G)$ taką, że $\bigcup_{t \in T} V_t = V(G)$ oraz dla każdej krawędzi t_1t_2 w T zbiór $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ rozdziela U_1 od U_2, to $(V_t)_{t \in T}$ jest dekompozycją drzewową G.

Zadanie 88 (Diestel, Lemma 12.3.2). Niech H będzie podgrafem G. Pokaż, że $\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)$.

Zadanie 89 (Diestel, Lemma 12.3.3). Niech H będzie minorem G. Pokaż, że $\mathrm{tw}(H) \leqslant \mathrm{tw}(G)$.

Zadanie 90. Niech $W \subset V(G)$ będzie takie, że $G[W]$ jest kliką. Pokaż, że istnieje $t \in T$ takie, że $W \subset V(T)$.

Zadanie 91 (Diestel, Lemma 12.3.4). Niech $W \subset V(G)$. Pokaż, że jeśli nie istnieje $t \in T$ takie, że $W \subset V_t$, to istnieją $w_1, w_2 \in W$ i krawędź t_1t_2 w T takie, że $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ oddziela w_1 od w_2.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 9

treewidth

Zadanie 92. Pokaż odwrotność zadania 86: jeśli T jest drzewem, i $(V_t)_{t\in T}$ rodziną podzbiorów $V(G)$ taką, że $\bigcup_{t\in T} V_t = V(G)$ oraz dla każdej krawędzi t_1t_2 w T zbiór $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ rozdziela U_1 od U_2, to $(V_t)_{t\in T}$ jest dekompozycją drzewową G.

Zadanie 93 (Diestel, Lemma 12.3.4). Niech $W \subset V(G)$. Pokaż, że jeśli nie istnieje $t \in T$ takie, że $W \subset V_t$, to istnieją $w_1, w_2 \in W$ i krawędź t_1t_2 w T takie, że $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ oddziela w_1 od w_2.

Zadanie 94. Pokaż dekompozycję drzewową o szerokości 2 cyklu o n wierzchołkach.

Zadanie 95. Klasa grafów series–parallel jest zdefiniowana następująco: K_2 jest series–parallel i jeśli G powstaje z G' poprzez dodanie jednej krawędzi równoległej do już istniejącej, lub przez wepchnięcie wierzchołka w krawędź, to jeśli G' jest series–parallel, to G też. Pokaż, że grafy series–parallel mają treewidth co najwyżej 2.

Zadanie 96. Pokaż, że mając daną dekompozycję drzewową o szerokości t da się skonstruować w czasie wielomianowym dekompozycję o tej samej szerokości taką, że T jest ukorzenione, i każdy wierzchołek $t \in T$ jest jednym z czterech typów:

(leaf) $|V_t| = 1$ i t jest liściem T;

(introduce) t ma jednego syna s i $V_t = V_s \cup \{v\}$, $v \notin V_s$;

(forget) t ma jednego syna s i $V_s = V_t \cup \{v\}$, $v \notin V_t$;

(join) t ma dwóch synów s i s' i $V_s = V_{s'} = V_t$.

Zadanie 97. Na grafie G mamy złodzieja i k policjantów. Złodziej ma bardzo szybki motorek, a policjanci helikoptery. Pomiędzy turami każda osoba okupuje jakiś wierzchołek grafu. Tura wygląda następująco:

1. pewien podzbiór policjantów wznosi się ze swoich miejsc i deklaruje, gdzie będzie lądować;
2. złodziej się przemieszcza, ale nie może przechodzić przez wierzchołki, w których stoi policjant (taki, który nie podróżuje);
3. policjanci lądują.

Policjanci wygrywają, jeśli jakiś policjant wyląduje w wierzchołku, gdzie jest złodziej. Pokaż, że minimalna liczba policjantów potrzeba do złapania złodzieja to $\mathrm{tw}(G) + 1$.

Zadanie 98. Pokaż, że treewidth kraty $k \times k$:

1. wynosi co najwyżej k,

2. wynosi co najmniej $k-1$,

3. wynosi co najmniej k.

Zadanie 99. Pokaż, że graf G jest dwuspójny wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T,(V_t)_{t\in T})$ o następujących własnościach:

1. dla każdej krawędzi t_1t_2 w T mamy $|V_{t_1}\cap V_{t_2}|=2$;

2. wszystkie korpusy tej dekompozycji są trzyspójne lub są cyklami (dla wierzchołka $t\in T$ korpusem nazywamy graf H_t powstały przez dodanie do $G[V_t]$ krawędzi dla każdej pary $x,y\in V_{t'}\cap V_t$ dla każdego t' będącego sąsiadem t w T).

Zadanie 100. Niech $\mathbb{B}$ będzie cierniami największego możliwego rzędu w G, a $(T,(V_t)_{t\in T})$ dekompozycją drzewową G o najmniejszej możliwej szerokości. Pokaż, że jeśli V_{t_1} i V_{t_2} pokrywa $\mathbb{B}$, to $V_{t_1}=V_{t_2}$.

Zadanie 101. Pokaż, że dowolny podzbiór kolumny kraty $r\times r$ o co najmniej k wierzchołkach jest zewnętrznie k–spójny.

Zadanie 102. Pokaż, że jeśli mamy zbiór zewnętrznie $10k$–spójny o $100k$ wierzchołkach, to graf ma treewidth co najmniej k.

Poniższe dwa zadania może nie mają związku z teorią minorów, ale przydadzą się na kolejnym wykładzie.

Zadanie 103. Pokaż, że jeśli drzewo ma co najmniej $r(r-1)$ wierzchołków ($r\geqslant 2$), to ma r liści lub ścieżkę o r wierzchołkach.

Zadanie 104. Niech T będzie drzewem, gdzie każdy wierzchołek ma stopień co najwyżej 3. Niech $X\subset V(G)$ i niech $k\geqslant 1$. Wtedy można z T wywalić część krawędzi tak, by każda pozostała spójna składowa miała od k do $2k-1$ wierzchołków z X (poza jedną, która może mieć mniej niż k).

kilka istotnych i nietrywialnych definicji

Treewidth. Dla grafu G dekompozycją drzewową nazwiemy takie drzewo T i rodzinę zbiorów wierzchołków $(V_t)_{t \in T}$, że:

(T1) $V(G) = \bigcup_{t \in T} V_t$;

(T2) dla każdej krawędzi $uv \in E(G)$ istnieje $t \in T$, że $u, v \in V_t$;

(T3) dla każdego $v \in V(G)$ zbiór $\{t : v \in V_t\}$ jest spójny w T.

Szerokością dekompozycji nazywamy $\max_{t \in T} |V_t| - 1$. Szerokość drzewiasta (treewidth) grafu to najmniejsza możliwa szerokość dekompozycji. Jeśli dodatkowo będziemy wymagać, by T było ścieżką, otrzymamy dekompozycję ścieżkową i szerokość ścieżkową (ang. pathwidth).

Ciernie (bramble). Mówimy, że $A, B \subset V(G)$ się dotykają, jeśli $A \cap B \neq \emptyset$ lub $E(A, B) \neq \emptyset$. Rodzinę $\mathbb{B} = (A_k)_{k=1}^n$ niepustych podzbiorów $V(G)$ nazwiemy cierniami, jeśli

1. $G[A_k]$ jest spójne dla każdego k;

2. A_k i A_j się dotykają dla każdych k, j.

Zbiór X pokrywa ciernie $\mathbb{B}$ jeśli $X \cap A_k \neq \emptyset$ dla każdego k. Rząd cierni $\mathbb{B}$ to wielkość najmniejszego zbioru pokrywającego $\mathbb{B}$.

Zbiory zewnętrznie k-spójne. $X \subset V(G)$ jest zewnętrznie k–spójny, jeśli $|X| \geqslant k$ i dla każdych rozłącznych $Y, Z \subset X$, $|Y| = |Z| \leqslant k$ istnieje $|Y|$ rozłącznych wierzchołkowo ścieżek łączących Y z Z, nie używających wierzchołków i krawędzi $G[X]$ (poza początkiem i końcem).

Splątania (mesh). Parę (A, B) podgrafów G nazwiemy k–splątaniem, jeśli w A można wyróżnić podgraf T będący drzewem taki, że

1. T nie ma wierzchołków o stopniu większym niż 3;

2. każdy wierzchołek $V(A) \cap V(B)$ należy do T i ma stopień nie większy niż 2;

3. T ma wierzchołek stopnia nie większego niż 1 w $V(A) \cap V(B)$;

4. $V(A) \cap V(B)$ jest zewnętrznie k–spójny w podgrafie B.

Rzędem (A, B) nazwiemy $|V(A) \cap V(B)|$. Jeśli pominiemy ostatni warunek, to co dostaniemy nazywamy 0–splątaniem.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 10

minory, treewidth

zaległe

Zadanie 105 (Diestel, Lemma 12.3.4). Niech $W \subset V(G)$. Pokaż, że jeśli nie istnieje $t \in T$ takie, że $W \subset V_t$, to istnieją $w_1, w_2 \in W$ i krawędź t_1t_2 w T takie, że $V_{t_1} \cap V_{t_2}$ oddziela w_1 od w_2.

Zadanie 106. Pokaż, że graf G jest dwuspójny wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t\in T})$ o następujących własnościach:

1. dla każdej krawędzi t_1t_2 w T mamy $|V_{t_1} \cap V_{t_2}| = 2$;
2. wszystkie korpusy tej dekompozycji są trzyspójne lub są cyklami (dla wierzchołka $t \in T$ korpusem nazywamy graf H_t powstały przez dodanie do $G[V_t]$ krawędzi dla każdej pary $x, y \in V_{t'} \cap V_t$ dla każdego t' będącego sąsiadem t w T).

Zadanie 107. Niech $\mathbb{B}$ będzie cierniami największego możliwego rzędu w G, a $(T, (V_t)_{t\in T})$ dekompozycją drzewową G o najmniejszej możliwej szerokości. Pokaż, że jeśli V_{t_1} i V_{t_2} pokrywa $\mathbb{B}$, to $V_{t_1} = V_{t_2}$.

Zadanie 108. Pokaż, że jeśli mamy zbiór zewnętrznie $10k$–spójny o $100k$ wierzchołkach, to graf ma treewidth co najmniej k.

grafy przedziałowe i cięciwowe

Graf G jest grafem cięciowym (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3. Graf G jest grafem przedziałowym (ang. interval graph), jeśli istnieje rodzina otwartych odcinków na prostej $(s_v)_{v\in V(G)}$ taka, że $uv \in E(G)$ wtw $s_u \cap s_v \neq \emptyset$.

Zadanie 109. Pokaż, że G jest cięciwowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t\in T})$ taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

Zadanie 110. Pokaż, że G jest przedziałowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję ścieżkową $(T, (V_t)_{t\in T})$ (czyli wymagamy, by T było ścieżką) taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

well–quasi–orderings i minory

Zadanie 111. Dany jest quasi–porządek częściowy $(A, \leqslant)$. Dla zbioru $X \subset A$ definiujemy

$$\mathrm{Forb}(X) = \{a \in A : \forall_{x\in X} \neg x \leqslant a\}.$$

Pokaż, że $(A, \leqslant)$ jest WQO wtedy i tylko wtedy gdy każdy podzbiór $B \subset A$ zamknięty ze względu na branie mniejszych elementów, da się zapisać jako $B = \mathrm{Forb}(X)$ dla pewnego skończonego X.

Zadanie 112. Pokaż, że drzewa nie są WQO ze względu na relację bycia podgrafem.

Zadanie 113. Pokaż, że zbiór wszystkich grafów prostych nie jest WQO ze względu na relacje ściągania (możemy tylko ściągać wierzchołki wzdłuż krawędzi, nie możemy usuwać krawędzi i wierzchołków).

Zadanie 114. Ania źle zrozumiała definicję relacji bycia minorem: zrozumiała, że ściągnąć można dowolne dwa wierzchołki, niekoniecznie połączone krawędzią. Pokaż, że przy tej definicji zbiór grafów prostych z tą relacją jest WQO.

Zadanie 115. Pokaż, że zbiór wszyskich grafów prostych, uporządkowany przez relację bycia topologicznym minorem, nie jest dobrym quasi–porządkiem (well–quasi–ordering).

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 11

zastosowania treewidthu i teorii minorów

bardzo zaległe, ale dość ważne

Zadanie 116. Graf G jest grafem cięciowym (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3. Pokaż, że G jest cięciwowy wtedy i tylko wtedy gdy ma dekompozycję drzewową $(T, (V_t)_{t \in T})$ taką, że $G[V_t]$ jest kliką dla każdego $t \in T$.

Zadanie 117. Pokaż, że jeśli mamy zbiór zewnętrznie $10k$–spójny o $100k$ wierzchołkach, to graf ma treewidth co najmniej k.

well–quasi–orderings i minory

Zadanie 118. Dany jest quasi–porządek częściowy $(A, \leqslant)$. Dla zbioru $X \subset A$ definiujemy

$$\mathrm{Forb}(X) = \{a \in A : \forall_{x \in X} \neg x \leqslant a\}.$$

Pokaż, że $(A, \leqslant)$ jest WQO wtedy i tylko wtedy gdy każdy podzbiór $B \subset A$ zamknięty ze względu na branie mniejszych elementów, da się zapisać jako $B = \mathrm{Forb}(X)$ dla pewnego skończonego X.

Zadanie 119. Pokaż, że drzewa nie są WQO ze względu na relację bycia podgrafem.

Zadanie 120. Pokaż, że zbiór wszystkich grafów prostych nie jest WQO ze względu na relacje ściągania (możemy tylko ściągać wierzchołki wzdłuż krawędzi, nie możemy usuwać krawędzi i wierzchołków).

Zadanie 121. Ania źle zrozumiała definicję relacji bycia minorem: zrozumiała, że ściągnąć można dowolne dwa wierzchołki, niekoniecznie połączone krawędzią. Pokaż, że przy tej definicji zbiór grafów prostych z tą relacją jest WQO.

Zadanie 122. Pokaż, że zbiór wszyskich grafów prostych, uporządkowany przez relację bycia topologicznym minorem, nie jest dobrym quasi–porządkiem (well–quasi–ordering).

algorytmy na dekompozycji drzewowej

W poniższych zadaniach zakładamy, że na wejściu do algorytmu mamy graf G o n wierzchołkach wraz z dekompozycją drzewową o szerokości t.

Zadanie 123. Pokaż algorytm szukający najmniejszego pokrycia wierzchołkowego w G w czasie $2^{O(t)} n^{O(1)}$.

Zadanie 124. Pokaż algorytm szukający największego zbioru niezależnego w G w czasie $2^{O(t)} n^{O(1)}$.

Zadanie 125. Pokaż algorytm szukający najmniejszego zbioru dominującego w G w czasie $2^{O(t)}n^{O(1)}$.

Zadanie 126. Pokaż algorytm szukający k–kolorowania w G w czasie $2^{O(t \log k)}n^{O(1)}$.

Zadanie 127. Pokaż algorytm szukający cyklu Hamiltona w G w czasie $2^{O(t \log t)}n^{O(1)}$.

Zadanie 128. Pokaż algorytm szukający najdłuższej ścieżki w G w czasie $2^{O(t \log t)}n^{O(1)}$.

bidimensionality

Zadanie 129. Pokaż algorytm, który dla grafu planarnego G o n wierzchołkach i liczby k stwierdzi w czasie $2^{O(\sqrt{k} \log k)}n^{O(1)}$ czy w G jest ścieżka długości co najmniej k.

Zadanie 130. Pokaż algorytm, który dla grafu planarnego G o n wierzchołkach i liczby k stwierdzi w czasie $2^{O(\sqrt{k})}n^{O(1)}$ czy w G jest zbiór niezależny wielkości co najmniej k.

Zadanie 131. Pokaż algorytm, który dla grafu planarnego G o n wierzchołkach i liczby k stwierdzi w czasie $2^{O(\sqrt{k})}n^{O(1)}$ czy w G jest zbiór dominujący wielkości co najwyżej k.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 12

kolorowania

pozostałości z wykładu

Zadanie 132. Podaj przykład grafu G takiego, że $\mathrm{ch}(G) > \chi(G)$.

Zadanie 133. Dana jest liczba $k > 1$. Podaj przykład grafu dwudzielnego G_k takiego, że $\mathrm{ch}(G_k) \geqslant k$.

Zadanie 134. Pokaż, że w grafach dwudzielnych $\chi'(G) = \mathrm{maxdeg}(G)$.

algorytm zachłanny

Przypomnijmy: na wykładzie rozważaliśmy algorytm zachłanny, który brał pewne ustawienie wierzchołków $v_1, v_2, \ldots, v_n$ i wierzchołkowi v_i przyporządkowywał najmniejszy możliwy kolor nieużyty przez $N(v_i) \cap \{v_1, v_2, \ldots, v_{i-1}\}$.

Zadanie 135. Pokaż, że istnieje takie ustawienie wierzchołków, że algorytm zachłanny użyje tylko $\chi(G)$ kolorów.

Zadanie 136. Pokaż graf dwudzielny o $2n$ wierzchołkach i ustawienie jego wierzchołków takie, że algorytm zachłanny użyje n kolorów.

grafy krytycznie k-kolorowalne

Graf G nazwiemy krytycznie k-kolorowalnym, jeśli $\chi(G) = k$ i dla każdego $v \in V(G)$ mamy $\chi(G \setminus v) < k$.

Zadanie 137. Pokaż, że każdy graf G o $\chi(G) = k$ ma podgraf indukowany krytycznie k-kolorowalny.

Zadanie 138. Wyznacz wszystkie krytycznie 3-kolorowalne grafy.

wielomian chromatyczny

Dla grafu G funkcję $P_G(k)$ przyporządkowywującą liczbie $k \geqslant 1$ liczbę kolorowań grafu G na k kolorów nazwiemy wielomianem chromatycznym G.

Zadanie 139. Pokaż, że jest to rzeczywiście wielomian. Pokaż dodatkowo, że ma on stopień $|V(G)|$, przy $x^{|V(G)|}$ ma 1, a przy $x^{|V(G)|-1}$ ma $-|E(G)|$.

Zadanie 140. Wyznacz wszystkie grafy G takie, że $P(G) = k(k-1)^{|V(G)|-1}$.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 13

discharging, grafy doskonałe

grafy doskonałe

Przypomnienie. Graf przedziałowy to taki graf G, że każdemu $v \in V(G)$ można przyporządkować przedział otwarty $I_v \subset \mathbb{R}$ taki, że $uv \in E(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy $I_v \cap I_u \neq \emptyset$. Graf G jest grafem cięciowym (ang. chordal graph), jeśli nie ma podgrafów indukowanych będących cyklami długości większej niż 3.

Zadanie 141. Pokaż, że następujące klasy grafów są doskonałe:

1. kliki,
2. grafy dwudzielne,
3. grafy przedziałowe,
4. grafy cięciwowe.

Zadanie 142. Pokaż, że cykl i antycykl długości nieparzystej większej od 3 nie jest grafem doskonałym.

Zadanie 143. Pokaż, że własność bycia grafem doskonałym nie jest zamknięta ani na branie podgrafów, ani na branie minorów.

Zadanie 144. Dla danego porządku częściowego $(A, \leqslant)$ grafem porównań G nazwiemy graf taki, że $V(G) = A$ i $xy \in E(G)$ jeśli x i y są różne i porównywalne. Pokaż, że taki graf G jest doskonały.

Zadanie 145. Pokaż, że dopełnienie grafu przedziałowego jest grafem porządku częściowego.

Zadanie 146. Dla grafu G grafem liniowym $L(G)$ nazwiemy graf taki, że $V(L(G)) = E(G)$ i $e_1e_2 \in E(L(G))$ jeśli e_1 i e_2 mają wspólny koniec. Pokaż, że

$$\chi(L(G)) \in \{\omega(L(G)), \omega(L(G)) + 1\}.$$

wzór Eulera i discharging

Zadanie 147. Pokaż, że w każdym grafie planarnym istnieje wierzchołek o stopniu co najwyżej 5.

Zadanie 148. Pokaż, że jeśli możemy narysować graf 6-regularny na torusie, to jest on striangularyzowany po narysowaniu.

Zadanie 149. Pokaż, że jeśli graf dwudzielny jest planarny, to ma on wierzchołek o stopniu co najwyżej 3.

Zadanie 150. Ania narysowała planarny graf dwudzielny $G = (V \cup W, E)$ taki, że wierzchołki w V mają stopień 5, a wierzchołki w W mają stopień 3. Następnie przyporządkowała numerki wierzchołkom tak, że:

1. każdy wierzchołek w V ma numerek 1, 2 lub 3, a każdy wierzchołek w W ma numerek $4, 5, 6, 7$ lub 8.

2. każdy wierzchołek w V zna wszystkie numerki od 4 do 8, a każdy wierzchołek w W zna wszystkie numerki od 1 do 3.

Pokaż, że Ania gdzieś się pomyliła.

Zadanie 151. Pokaż, że każdy graf planarny bez wierzchołków o stopniu mniejszym niż 3 ma dwa sąsiadujące wierzchołki o sumie stopni co najwyżej 13. (to jest trudne, i pewnie tego nie zrobimy, ale daję jak ktoś chce pomyśleć).

Zadanie 152. Podaj przykład grafu planarnego takiego, że ograniczenie z poprzedniego zadania jest na styk.

Wybrane zagadnienia teorii grafów — ćwiczenia 14

kolorowania

Zadanie 153. Udowodnij, że minimalny kontprzykład na twierdzenie o czterech barwach nie może zawierać cyklu rozspajającego długości trzy.

Zadanie 154. Udowodnij, że minimalny kontrprzykład na twierdzenie o czterech barwach nie może zawierać cyklu rozspajającego długości cztery.

Zadanie 155. Rozstrzygnij, czy następujące konfiguracje są redukowalne:

- Wierzchołek stopnia 4
- Wierzchołek stopnia 5
- Trójkąt złożony z dwóch wierzchołków stopnia 5 i jednego stopnia 4.

Zadanie 156. Niech T będzie minimalną triangulacją nie zawierającą żadnej z redukowalnych konfiguracji, zaś v niech będzie wierzchołkiem stopnia 5 w tej triangulacji. Udowodnij, że po rozładowaniu wedle procedury z wykładu ładunek w v jest niedodatni.

Zadanie 157. Udowodnij to samo, co powyżej, dla v stopnia 6.

Zadanie 158. Niech graf planarny G ma cykl Hamiltona. Udowodnij, że jego ściany są 3–kolorowalne (czyli, że graf dualny jest 3–kolorowalny).

Zadanie 159. Niech T będzie triangulacją bez wierzchołków stopnia mniejszego od 3. Udowodnij, że w T jest para sąsiadujących wierzchołków o sumie stopni mniejszej niż 14.

Zadanie 160. Niech G będzie dowolnym grafem planarnym. Udowodnij tezę jak wyżej.

(uwaga — ciągle wierzę, że prawdziwa jest teza z 13tką, ale jej nie docisnąłem)

Zadanie 161. Niech graf T będzie triangulacją. Udowodnij, że jego ściany są 2–kolorowalne wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Zadanie 162. Udowodnij, że triangulacja jest 3–kolorowalna wtedy i tylko wtedy, gdy każdy wierzchołek ma stopień parzysty.

Zadanie 163. Rozważmy rodzinę prostych na płaszczyźnie, z których żadne trzy nie są współpękowe. Rozważmy naturalny graf zadany przez te proste (wierzchołki to punkty przecięcia, krawędzie łączą pary sąsiednich wierzchołków na jednej prostej). Udowodnij, że tak zadany graf planarny jest 3–kolorowalny.