Projekty ON 2015-16

Leszek Marcinkowski

30 sierpnia 2016

W razie niejasności, błędów, literówek proszę o kontakt.

1 Optymalna kontrola - ogrzewanie pokoju

Projekt zawiera kilka wersji.

Założmy że w kwadratowym pokoju grzejemy/chłodzimy tylko w określonym kawałku brzegu Γ_1 pozostały kawałek brzegu jest izolowany (ewnetualnie poza oknem/nami) a chcemy żeby temperatura w określonej części byłą możliwie bliska zadanej wartości - dodatkowo wewnątrz mogą byc dodatkowe żródła ciepłą np. lodówka czy wewnętrzne.

Możemu rozważyć model stacjonarny tzn temperatura $u(x)$ spełnia równanie eliptyczne lub zależny od czasu $u(t,x)$ zależy rónież od czasu - wtedy musimy mieć warunek początkowy tzn znać wartość temperatury w zadanym momencie czasu t_0 - wtedy warunek brzegowy może zależeć od czasu jak również funkcja do której chcemy dopasować temperaturę.

1.1 Przypadek stacjonarny

Założmy że obszar to $\Omega = (0, a_1) \times (0, a_2)$ część brzegu na której grzejemy $\Gamma_1 = \{(0, s) : 0 \leq s \leq a_2\} \cup \{(s, 0) : 0 \leq s \leq a_1\}$ i że u spełnia (jest kontrolowana) przez równanie:

$$-Lu - S(u) = -\sum_{k=1} \frac{\partial}{\partial x_k} a_k(t,x) \frac{\partial}{\partial x_k} u(x) - S(u) = f(x) \qquad x \in \Omega \tag{1}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial n} u(s) + u(s) = g(s) \qquad x \in \Gamma_1 \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(s) = 0 \quad x \in \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \quad (izolacja) \tag{3}$$

$a_k(t,x)$ dla prostoty weźmy stałe równe tej samej stałej $a > 0$, λ dodatnia stała, $S(u)$ może być modelowane różnie - projekt powinien dopuszczać dowolną funkcję - u temperatura zależy wartośći funkcji $0 \leq g \leq g_{max}$ której szukamy a dokładniej szukamy takiego g_0 że

$$F(g_0) = \min_g F(g) \quad F(g) = \int_D |u(x) - h(x)|^2 dx$$

dla h danej funkcji określonej na $D = [b_1, a_1] \times [b_2, a_2]$, tu $0 < b_k < a_k$. g w praktycznych numerycznych obliczeniach musi być ze zbioru w przestrzeni skończenie wymiarowej np dodatnich wielomianów kwadratowych na każdej krawędzi etc, często postać związana jest z odpowiednią dyskretyzacją np w przypadku różnic dzielonych bierzemy g jako funkcję dyskretną określoną w odpowiednich punktach brzegowych siatki.

Podsumowując szukamy g_0 - dane są $f(x), h(x), S(u)$ - aby obliczyć $F(g)$ należy wyznaczyć $u = u(g)$ - tworzymy funkcję F która dla g z danego zbioru (w praktyce jakiegoś wektora np wartości dyskretego g w w odpowiednich pktach siatki etc) wylicza $F(g)$ skalar po drodze wyliczając dyskretne przybliżenie u - całkę też zastępujemy jakąś kwadraturą po D (np. trapezów (znów mamy odpowiednią funkcję octave'a) potem minimalizujemy $F(g)$ używając odpowiedniej funkcji octave'a.

Do wyboru są następujące dyskretyzacje:

- metoda różnic skończonych (tu można rozpatrywać różne wersje aproksymacji watunku brzegowego Robina/Neumanna) - przyjmując najproszą 2 punktową aproksymacje pochodnej normalnej otrzymujemy najprostszą wersje projektu.
- klasyczna ciągła metoda elementu skończonego liniowego
- niezgodna metoda liniowego elementu skończonego typu Crouzeix-Raviart (wbrew pozorom sama implementacja nie jest trudniejsza niż poprzedniej metody)
- klasyczna ciągła metoda elementu skończonego kwadratowego
- metoda kolokacji spektralnej (dla bardzo ambitnych)
- metoda skończonych objętości (dla ambitnych)

1.1.1 Testy

Proszę przetestować dla $a_1 = 2, a_2 = 4$, $b_1 = 1, b_2 = 2$, $a_k \equiv 1$, $S(u) \equiv 0$ lub $S(u) = -atan(u)/\pi$, $\lambda = 1$, $h \equiv 20$, $f(x) = 2$ lub $\sin(x_1)$.

Oczywiście w czasie testów mogę poprosić o inne wartości parametrów.

Wystarczy jak Państwo przetestują przypadek S liniowego tzn $S(u) = 0$ lub ogólniej $S(u) = c * u$ dla c stałej.

1.2 Przypadek niestacjonarny

Założy że obszar to $\Omega = (0, a_1) \times (0, a_2)$ część brzegu na której grzejemy $\Gamma_1 = \{(0, s) : 0 \leq s \leq a_2\} \cup \{(s, 0) : 0 \leq s \leq a_1\}$ i że $u(t, x)$ spełnia (jest kontrolowana) przez równanie:

$$\frac{\partial}{\partial t}u - \sum_{k=1} \frac{\partial}{\partial x_k} a_k(t, x) \frac{\partial}{\partial x_k} u(t, x) - S(u) = 0 \qquad x \in \Omega \quad t \in (0, T_{Max}) \tag{4}$$

$$\lambda \frac{\partial}{\partial n} u(t, s) + u(t, s) = g(t, s) \qquad x \in \Gamma_1 \quad t \in (0, T_{Max}) \tag{5}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} u(t, s) = 0 \quad x \in \Gamma_2 = \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \quad t \in (0, T_{Max}) \quad (izolacja) \tag{6}$$

Współczynniki a_k, parametr λ stałe, funkcja $S(u)$ dowolna tzn. jak w przypadku stacjonarnym.

u temperatura zależy od funkcji kontroli $g(t, x)$ spełniającej $0 \leq g \leq g_{max}$ której szukamy a dokładniej szukamy takiego $g(t, x)$ że

$$\min_g \int_0^{T_{max}} \int_D |u(t, x) - h(t, x)|^2 dx\, dt$$

dla h danej funkcji określonej na $(0, T_{max}) \times D$ dla $D = [b_1, a_1] \times [b_2, a_2]$, tu $0 < b_k < a_k$. My żeby uprościć zadanie będziemy szukać $g(t, s)$ jako funkcję zależną od funkcji $g_0(t)$ przyjmując

$$g(t,(s,0)) = \begin{cases} g_0(t) & s \in [0, 0.25 * a_1] \\ g_0(t)(1 - 0.5\frac{s-0.25*a_1}{0.75*a_1}) & s \in [0.25 * a_1, a_1] \end{cases} \tag{7}$$

$$g(t,(0,s)) = \begin{cases} g_0(t) & s \in [0, 0.25 * a_2] \\ g_0(t)(1 - 0.5\frac{s-0.25*a_2}{0.75*a_2}) & s \in [0.25 * a_2, a_2] \end{cases} \tag{8}$$

i dalej szukać minimum po funkcjach g_0 (z odpowiedniego zbioru...w praktyce zależnej od metody dyskretyzacji jaką wybierzemy)

Dyskretyzacje konstruujemy w ten sposób że wprowadzamy dyskretyzacje po przestrzeni (czyli po zmiennej x) tymi samymi metodami co w przypadku stacjonarnym, otrzymujemy układ równań zwyczajnych który

- rozwiążemy w odpowiednim solverem octave'a np **lsode**() - wersja domyślna
- sami zaimplementujemy odpowiedni solver dla RRzw np. zamknięty Euler czy Crank-Nicholson - dla chętnych.

Podsumowując należy wybrać sposób dyskretyzacji po przestrzeni a potem po czasie żeby otrzymać układ dyskretny.

W przypadku rozwiązywaniu otrzymanego po odpowiedniej dyskretyzacji po przestrzeni układu RRzw za pomocą **lsode**() można przyjąć, że g_0 jest splajnem liniowym na równomiernym podziale odcinka $[0, T_{MAX}]$ (określonym przez wartości w węzłach i które de facto wtedy obliczamy dla przybliżenia g_0).

1.3 Wariacje

Najprostsze wariacje to zmienić obszar w którym chcemy by temperatura była możliwie blisko ustalonej, czy zmienić warunki brzegowe np założyć że w części brzegu izolowanego do tej pory mamy okno przez które wpływa lub wypływa strumień energii proporcjonalny do temperatury wewnątrz i zależnie od temperatury na zewnątrz, w przypadku stacjonarnym stałej, w niestacjonarnym zależnej np od pory dnia (chłodne noce gorące dni etc). Możemy zmienić model ogrzewania pokoju np. zakładając że kontrolujemy nie ile energii wpływa przez Γ_1 ale że ustalamy temperaturę na Γ_1 (np. mając grzejnik) etc czy i to i to, na kawałku Γ_1 kontrolujemy wpływ energii a na kawałku temperaturę.

Można rozszerzyć model na przypadek trójwymiarowy etc Czy założyć że dodatkowo współczynniki dyfuzji zmieniają się w zależności od temperatury tzn $a = a(u)$.

2 Inne projekty

Można zaproponować swój projekt ale również mam kilka projektów polegających na rozwiązaniu układu RR modelujących pożar lasu, model raka, malarii etc Szczegóły udostępnię na prośbę osób zainteresowanych.