Projekty NRR 2015-16

Leszek Marcinkowski

4 grudnia 2015

Streszczenie

Projekty z NRR - dla chętnych. W ramach zaliczenia projektów należy znać podstawowe własności metod zaimplementowanych w danym projekcie.

1 MES niezgodny typu Crouzeix-Raviart w 2 wymiarach

Rozpatrzmy modelowe zadanie:

$$\begin{aligned} -a\triangle u^* + \vec{b}^T \nabla u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $a > 0, \vec{b}^T = (b_1, b_2), c \geq 0$ stałe.

Zaprogramowaćw octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego typu Crouzeix-Raviart na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych a, b_1, b_2, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h^{CR} u^*$ - funkcję z przestrzeni MESu typu CR przyjmującą wartości u^* w środkach krawędzi trójkątów (czyli w punktach nodalnych metody CR).

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 tzw łamanej (broken) czy L^2.

2 Element biliniowy w 2 wymiarach

Rozpatrzmy modelowe zadanie

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + b * \partial_{x_1} u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $b, c \geq 0$ stałe.

Zaprogramowaćw octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego typu biliniowego na standardowej równomiernej triangulacji prostokątu na małe podprostokąty

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych b, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję z przestrzeni MESu biliniowego przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach prostokątów, czyli w punktach nodalnych metody biliniowej MESu.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

3 Element kwadratowy w 2 wymiarach

Metoda kwadratowa elementu skończonego dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + b * \partial_{x_2} u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $b, c \geq 0$ stałe.

Zaprogramować w octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego kwadratową na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a.

Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych b, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję z kwadratowej przestrzeni MESu przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach i środkach krawędzi trójkątów, czyli w punktach nodalnych metody kwadratowej MESu, por.
`http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=nrr&part=Ch12#S1.SS3`.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

Do obliczania prawej strony, tzn. $\int_\Omega f\phi_x\, dx$ dla ϕ_x funkcji bazowej nodalnej dla węzła x zastosować kwadraturę na trójkącie τ: $Q_\tau v = \int_\tau I_{\tau,1}(v)\, dx \approx \int_\tau v\, dx$, gdzie $I_{\tau,1}(v)$ jest funkcją liniową taką, że $I_{\tau,1}(v)(x) = v(x)$ dla x wierzchołek trójkąta τ. Wtedy przybliżenie $\int_\Omega f\phi_x\, dx$ (tu $v = f\phi_x$) jest sumą przybliżeń całek po trójkątach w nośniki ϕ_x czyli po trójkątach z x jako wierzchołkiem.

4 Metoda różnic skończonych - warunek Neumanna - schemat podwyższonego rzędu w 2 wymiarach

Zaimplementować w octavie (czy co pewnie bardziej pracochłonne w innym języku) metodę różnic skończonych rzędu dwa dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} &= g_1 \qquad na\ \Gamma_1 \\ u^* &= g_2 \qquad na\ \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{aligned}$$

gdzie $c > 0$ stała, Γ_1 otwarta prawa krawędź brzegu kwadratu.

Siatkę rozpatrzmy równomierną tzn $\overline{\Omega}_h = (k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ Laplacian zdyskretyzujmy przez standardową różnicę na pięciu punktach a pochodną normalną podwyższając rząd - przyjmujemy, że równanie spełnione jest też na Γ_1 i korzystając z tego podwyższamy rząd bo w punkcie brzegowym siatki $x \in \Gamma_1$:

$$\frac{\partial u^*}{\partial n}(x) = \frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x) = \overline{\partial}_{1,h} u^*(x) + 0.5 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2}(x) h + O(h^2)$$

teraz korzystając z założenia, że równanie wyjściowe spełnione w $x \in \Gamma_1$ widzimy

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2}(x) = -\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2}(x) + c * u^*(x) - f(x) = -\partial\overline{\partial}_{2,h} u^*(x) + c * u^*(x) - f(x) + O(h^2)$$

Z tych dwóch równań konstruujemy schemat rzędu dwa.

Zadaniem jest dopracowanie szczegółów, potem implementacja i przetestowanie. Tzn. stworzyć układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania punktach siatki i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałej c i różnych wartości f i g_k.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w dyskretnej normie maksimum i normie typu L^2. Porównać rozwiązanie schematu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy funkcję siatkową przyjmującą wartości u^* w punktach siatki

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy w szczególności dla znanych gładkich rozwiązań przetestować rząd zbieżności w dyskretnych normach L^2_h i dyskretnej normie maksimum.

W ramach zaliczenia należy też znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie dyskretnej maksimum czy L^2_h.

5 Metoda różnic skończonych w 2 wymiarach - obszar nieprostokątny tzn. kula - warunek Dirichleta - aproksymacja Collatza

Zaimplementować w octavie (czy co pewnie bardziej pracochłonne w innym języku) metodę różnic skończonych rzędu dwa dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = K(0,1) \\ u^* &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $c > 0$ stała.

Siatkę rozpatrzmy równomierną na $[-1,1]^2$ przeciętą z $\overline{\Omega}$ tzn. $\overline{\Omega}_h = (-1+k*h, -1+l*h) \cap \overline{\Omega}$ dla $h = 2/N$. Laplacian zdyskretyzujmy przez standardową różnicę na pięciu punktach. Na brzegu siatkowym zastosujemy aproksymacje Collatza warunku brzegowego : dla punktu brzegowego $x_{k,l}$ niech $x_{k-1,l}$ będzie punktem wewnętrznym siatki a $x_{k,l} + (h,0)$ będzie poza Ω czyli poza siatką wtedy istnieje punkt $p = x_{k,l} + (\alpha h, 0) \in \partial\Omega$ dla $0 < \alpha < 1$ - niech $l(t)$ wielomian interpolacyjny liniowy taki, że $l(0) = u_{k-1,l}, l(h) = u_{k,l}$ a wtedy wartość operatora siatkowego dla $x_{k,l}$ jest równa $l((1+\alpha)h) = u(p) = g(p)$ (prawą stronę znamy). Podobnie postepujemy dla wszystkich punktów brzegowych siatki otrzymując schemat rzędu dwa (co należałoby uzasadnić).

Zadaniem jest dopracowanie szczegółów, potem implementacja i przetestowanie. Tzn. stworzyć układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania punktach siatki i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałej c i różnych wartości f i g.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w dyskretnej normie maksimum i normie typu L^2. Porównać rozwiązanie schematu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy funkcję siatkową przyjmującą wartości u^* w punktach siatki

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy w szczególności dla znanych gładkich rozwiązań przetestować rząd zbieżności w dyskretnych normach L^2_h i dyskretnej normie maksimum.

W ramach zaliczenia należy też znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie dyskretnej maksimum czy L^2_h.

6 Metoda elementu skończonego - mieszany warunek brzegowy w 2 wymiarach

Zaimplementować i potem przetestować liniową metodę elementu skończonego z mieszanymi warunkami brzegowymi dla modelowego równania drugiego rzędu na kwadracie a dokładniej na lewej i dolnej krawędzi postawmy warunki Dirichleta na pozostałych Neumanna. Dokładny opis poniżej.

Niech $\Omega = (0,1)^2$ kwadrat jednostkowy - brzeg kwadratu dzielimy na cztery rozłączne krawędzie: $\partial\Omega = \bigcup_{k,l=0,1} \overline{\Gamma_{k,l}}$. (przyjmijmy, że $\Gamma_{0,0}$ lewa krawędź, $\Gamma_{1,0}$ prawa, $\Gamma_{0,1}$ dolna, $\Gamma_{1,1}$ górna).

Rozpatrzmy modelowe zadanie różniczkowe z mieszanymi warunkami brzegowymi:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + cu^* &= f \qquad w\,\Omega \\ l_{k,l}u &= g_{k,l} \qquad na\,\Gamma_{k,l} \end{aligned}$$

gdzie c dodatnia stała a

$$l_{k,l}u(s) = \begin{cases} u(s) & k = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial n}(s) & k = 1 \end{cases}$$

Tutaj $\frac{\partial u}{\partial n}$ pochodna normalna do danej krawędzi. W wierzchołkach stawiamy warunek Dirichleta czyli zakładamy, że znamy wartości rozwiązania w wierzchołkach.

Zaprogramowaćw octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego liniową na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn. wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k*h, l*h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn. stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a.

Następnie przetestować - dla różnych wartości stałej c i różnych wartości f i $g_{k,l}$.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1 porównać rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję liniową z przestrzeni MESu przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach trójkątów (czyli w punktach nodalnych metody liniowej MESu). Za przybliżenie normy maksimum weźmy maksimum z modułu danej funkcji w punktach nodalnych.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy w szczególności dla znanych gładkich rozwiązań przetestować rząd zbieżności w normach H^1, L^2, dyskretnej normie maksimum.

W ramach zaliczenia należy też znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

7 Element kubiczny w 2 wymiarach

Metoda kubiczna elementu skończonego dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + b * \partial_{x_1} u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $b, c \geq 0$ stałe.

Zaprogramować w octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego kubiczną na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a.

Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych b, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję z kubicznej przestrzeni MESu przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach, środku ciężkości,dwu punktach wewnętrznych krawędzi (w odległości 1/3 i 2/3 długości krawędzi od ustalonego końca tej krawędzi) trójkątów , czyli w punktach nodalnych metody kubicznej MESu, por.
`http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=nrr&part=Ch12#S1.SS3`.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy.

W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

Do obliczania prawej strony, tzn. $\int_\Omega f\phi_x\,dx$ dla ϕ_x funkcji bazowej nodalnej dla węzła x zastosować albo jakąś procedurę korzystającą z funkcji `quad()` w octavie lub kwadraturę na trójkącie τ: $Q_\tau v = \int_\tau I_{\tau,2}(v)\,dx \approx \int_\tau v dx$ gdzie $I_{\tau,2}(v)$ jest funkcją kwadratową na trójkącie τ taką, że $I_{\tau,2}(v)(x) = v(x)$ dla x wierzchołek lub środek krawędzi trójkąta τ. Wtedy przybliżenie $\int_\Omega f\phi_x\,dx$ (tu $v = f\phi_x$) jest sumą przybliżeń całek po trójkątach w nośniki ϕ_x czyli po trójkątach z x jako wierzchołkiem.

8 Element kubiczny w 1 wymiarze - różne warunki brzegowe

Zaimplementować ciągłą metodę kubiczna MESu na siatce nierównomiernej z warunkami brzegowymi typu Robin lub Dirichleta lub mieszanymi dla równania

$$-u'' + cu = f \quad x \in (a, b)$$

Napisać funkcję octave'a rozwiązująca to zadanie, tzn parametrami niech będą:

- Input:
    1. F - wskaźnik do funkcji obliczającej f
    2. c- wartość parametru $c \geq 0$
    3. bca - jak to skalar to przyjmujemy warunek brzegowy Dirichleta w a tzn. $u(a) = bca$, jak wektor dwuelementowy to $bca(1)$ wartość współczynnika warunku Robin a $bca(2)$ prawa strona w warunku Robin tzn. $-u'(a) + bca(1)u(a) = bca(2)$
    4. bcb - analogicznie ale dla b - dla warunku Robin: $u'(b) + bcb(1)u(b) = bcb(2)$
    5. a, b - końce odcinka
    6. x - wektor z węzłami $[x_0, x_1, ..., x_n]$ stad powinno być $a = x_0, b = x_n$ - jeśli x nie podane to domyślną wartość to 101 węzłów równomiernych na $[a, b]$
    7. QUAD - opcja jako obliczać prawą stronę - 0 - liczymy kwadratura Simpsona na każdym podocinku, 1 funkcją octave'a **quad**()
- Output
    1. y - siatka z punktami nodalnymi MESu kubicznego tzn mamy punkty $x_0, x_0+(1/3)h_0, x_0+2h_0/3, x_1, ..., x_k, x_k + h_k/3, x_k + (2/3)h_k, x_{k+1}, ..., x_n$ dla $h_k = x_{k+1} - x_k$
    2. u - wartości rozwiązania w punktach nodalnych MESu kubicznego tzn $u_k = u(y_k)$
    3. h - wektor z długościami pododcinków $h_k = x_{k+1} - x_k$
    4. A macierz sztywności (odpowiadająca dyskretyzacji $\int_a^b u'v'$ w bazie nodalnej)
    5. M macierz masy (odpowiadająca dyskretyzacji $\int_a^b uv$ w bazie nodalnej)

Macierze M i A można potem użyć do liczenia błędów w normach H^1 i L^2 tzn. $|u_h|_{H^1(a,b)} = \sqrt{\vec{u}^T A\vec{u}}$ i $\|u_h\|_{L^2(a,b)} = \sqrt{\vec{u}^T M\vec{u}}$ dla $\vec{u}$ - wektora z wartościami u_h w węzłach MESu.

Wartości prawej strony tzn całki $\int_a^b f(x)\phi_k \, dx$ może Pan obliczyć używając odpowiedniej funkcji octave'a (**quad**()) albo używając np zlożonej kwadratury Simpsona (tzn. kwadratury Simpsona na każdym podocinku zawarty w nośniku odpowieniej funkcji nodalnej). Użytkownik funkcji będzie mógł wybrać.

Testy:

- Najprostszy test - proszę wziąć znana gładką funkcje np $u = \sin(x)$ i sprawdzić na odcinku $[-1, 3]$ czy uzyskamy dobre przybliżenie tej funkcji dobierając f i wartości brzegowe odpowiednio.
- Kolejne prosty test: u wielomian rożnych stopni $1, 2, 3, 4$itp (oczywiście należy odpowiednio dobierać warunki brzegowe i f)

- Test rzędu zbieżności w normie L^∞, H^1 i L^2 dla siatki równomiernej - czy równomiernej lekko zaburzonej np. $x_k = a+(k+eps_k)hh = (b-a)/n$ z eps_k losowa wartością z $[-1,1]/10$ dla $k-1,\ldots,N-1$.

- Test rzędu zbieżności biorąc siatkę nierównomierną np $h_k = 0.7h_{k-1}$ z ustalonym h_1 (potem można porównywać ilorazy błędu dla siatek z o polowe mniejszym h_1.)

- Testy błędów dla siatki jak powyżej biorąc rozwiązanie silnie oscylujące blisko prawego końca odcinka np $u = \sin(x^2)$ na $[0,4]$ - można narysować wykres błędu tzn wykres $I_h u - u_h$ ($I_h u$ interpolator nodalny - u_h rozwiązanie dyskretne)

- Test własności dyfuzyjnych - bierzemy tę samą prawa stronę np $f(x)$ funkcja charakterystyczna odcinka $[0,1]$ i liczymy rozwiazania z zerowymi warunkami brzegowymi $-u''+cu = cf$ na $[-2,2]$ dla $c = 10^k$ dla $k = -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4$.

Przy wszystkich testach rzędu zbieżności - porównać wyniki kiedy prawą stronę liczymy oboma sposobami.