Projekty NRR 2014-15

Leszek Marcinkowski

21 października 2014

Streszczenie

Projekty z NRR - dla chętnych. W ramach zaliczenia projektów należy znać podstawowe własności metod zaimplementowanych w danym projekcie.

1 MES niezgodny typu Crouzeix-Raviart

Rozpatrzmy modelowe zadanie:

$$\begin{aligned} -a\triangle u^* + \vec{b}^T \nabla u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $a > 0, \vec{b}^T = (b_1, b_2), c \geq 0$ stałe.

Zaprogramowaćw octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego typu Crouzeix-Raviart na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych a, b_1, b_2, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h^{CR} u^*$ - funkcję z przestrzeni MESu typu CR przyjmującą wartości u^* w środkach krawędzi trójkątów (czyli w punktach nodalnych metody CR).

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 tzw łamanej (broken) czy L^2.

2 Element biliniowy

Rozpatrzmy modelowe zadanie

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + b * \partial_{x_1} u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $b, c \geq 0$ stałe.

Zaprogramowaćw octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego typu biliniowego na standardowej równomiernej triangulacji prostokątu na małe podprostokąty

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych b, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję z przestrzeni MESu biliniowego przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach prostokątów, czyli w punktach nodalnych metody biliniowej MESu.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

3 Element kwadratowy

Metoda kwadratowa elementu skończonego dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + b * \partial_{x_2} u^* + cu^* &= f \qquad w\ \Omega = (0,1)^2 \\ u &= g \qquad na\ \partial\Omega \end{aligned}$$

gdzie $b, c \geq 0$ stałe.

Zaprogramować w octave (lub np. C/C++ ale to zajmie więcej czasu) metodę elementu skończonego kwadratową na standardowej równomiernej triangulacji kwadratu - tzn wprowadzamy kwadraty o wierzchołkach: $(k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ i dzielimy je przekątną.

Tzn stworzyć w odpowiedniej bazie nodalnej układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a.

Następnie przetestować - dla różnych wartości stałych b, c.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w normie maksimum, typu L^2 i H^1, porównujemy rozwiązanie MESu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy $I_h u^*$ - funkcję z kwadratowej przestrzeni MESu przyjmującą wartości u^* w wierzchołkach i środkach krawędzi trójkątów, czyli w punktach nodalnych metody kwadratowej MESu, por.
`http://mst.mimuw.edu.pl/lecture.php?lecture=nrr&part=Ch12#S1.SS3`.

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy. W ramach zaliczenia należy znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie H^1 czy L^2.

Do obliczania prawej strony, tzn. $\int_\Omega f\phi_x\,dx$ dla ϕ_x funkcji bazowej nodalnej dla węzła x zastosować kwadraturę na trójkącie τ: $Q_\tau v = \int_\tau I_{\tau,1}(v)\,dx \approx \int_\tau v\,dx$, gdzie $I_{\tau,1}(v)$ jest funkcją liniową taką, że $I_{\tau,1}(v)(x) = v(x)$ dla x wierzchołek trójkąta τ. Wtedy przybliżenie $\int_\Omega f\phi_x\,dx$ (tu $v = f\phi_x$) jest sumą przybliżeń całek po trójkątach w nośniki ϕ_x czyli po trójkątach z x jako wierzchołkiem.

4 Metoda różnic skończonych - warunek Neumanna - schemat podwyższonego rzędu

Zaimplementować w octavie (czy co pewnie bardziej pracochłonne w innym języku) metodę różnic skończonych rzędu dwa dla modelowego równania:

$$\begin{aligned} -\triangle u^* + cu^* &= f & w\ \Omega = (0,1)^2 \\ \frac{\partial u^*}{\partial n} &= g_1 & na\ \Gamma_1 \\ u^* &= g_2 & na\ \partial\Omega \setminus \Gamma_1 \end{aligned}$$

gdzie $c > 0$ stała, Γ_1 otwarta prawa krawędź brzegu kwadratu.

Siatkę rozpatrzmy równomierną tzn $\overline{\Omega}_h = (k * h, l * h)$ dla $h = 1/N$ Laplacian zdyskretyzujmy przez standardową różnicę na pięciu punktach a pochodną normalną podwyższając rząd - przyjmujemy, że równanie spełnione jest też na Γ_1 i korzystając z tego podwyższamy rząd bo w punkcie brzegowym siatki $x \in \Gamma_1$:

$$\frac{\partial u^*}{\partial n}(x) = \frac{\partial u^*}{\partial x_1}(x) = \overline{\partial}_{1,h} u^*(x) + 0.5 \frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2}(x) h + O(h^2)$$

teraz korzystając z założenia, że równanie wyjściowe spełnione w $x \in \Gamma_1$ widzimy

$$\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_1^2}(x) = -\frac{\partial^2 u^*}{\partial x_2^2}(x) + c * u^*(x) - f(x) = -\partial\overline{\partial}_{2,h} u^*(x) + c * u^*(x) - f(x) + O(h^2)$$

Z tych dwóch równań konstruujemy schemat rzędu dwa.

Zadaniem jest dopracowanie szczegółów, potem implementacja i przetestowanie. Tzn. stworzyć układ równań liniowych na wartości przybliżonego rozwiązania punktach siatki i rozwiązać go korzystając z odpowiedniego solvera octave'a. Następnie przetestować - dla różnych wartości stałej c i różnych wartości f i g_k.

W szczególności eksperymentalnie dla znanych gładkich i niegładkich rozwiązań zbadać rząd zbieżności w dyskretnej normie maksimum i normie typu L^2. Porównać rozwiązanie schematu z rozszerzeniem rozwiązania dokładnego które znamy. Za rozszerzenie bierzemy funkcję siatkową przyjmującą wartości u^* w punktach siatki

W ramach projektu należy się z metodą zapoznać, zaimplementować kod i przeprowadzić testy w szczególności dla znanych gładkich rozwiązań przetestować rząd zbieżności w dyskretnych normach L^2_h i dyskretnej normie maksimum.

W ramach zaliczenia należy też znać podstawowe własności metody np. jaki jest rząd zbieżności w normie dyskretnej maksimum czy L^2_h.