Kwadratury

Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a,b]) : \max_{x\in[a,b]} |f^{(r+1)}(x)| \le M\}$$

oraz $S(f) = \int_a^b f(x)dx$.

Zadanie 1 Znaleźć błąd dla metody prostokątów, $Q_0(f) = (b-a)f((a+b)/2)$, tzn. udowodnić

$$\begin{aligned} \max_{f\in F_M^0} |S(f) - Q_0(f)| &= M(b-a)^2/4 \\ \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q_0(f)| &= M(b-a)^3/24 \end{aligned}$$

Rozwiązanie: Wprost ze wzoru na błąd kwadratury interpolacyjnej:

$$|f - Q_0 f| \le \|f'\|_{\infty,[a,b]} \int_a^b |x - \frac{a+b}{2}|dx \le M \int_a^b |x - \frac{a+b}{2}|dx$$

i po scałkowaniu mamy

$$|f - Q_0 f| \le M * 0.5(b-a)^2$$

równość jest osiągana dla $f = M|x - \frac{a+b}{2}|$, która formalnie jest spoza klasy ale może być dowolnie blisko aproksymowana w normie supremum funkcjami z klasy (zadanie).

Dla $f \in F_M^1$ zauważamy, że (oczywiste jak się wie że tak jest...)

$$\begin{aligned} \int_a^b f - Q_0 f &= \int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2})dx \\ &= \int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2}) - f'(\frac{a+b}{2})(x - \frac{a+b}{2})dx \\ &= \int_a^b 0.5 * f''(\xi(t))(x - 0.5(a+b))^2 dx \end{aligned}$$

korzystając z wzoru Taylora. Dalej tw. o wartości średniej dla całki daje:

$$\int_a^b f - Q_0 f = 0.5 * f''(\eta) \int_a^b (x - 0.5(a+b))^2 dx = f''(\eta)(0.5 * (b-a))^3/3$$

co daje oszacowanie, a równość jest osiągana np. dla $0.5 * M * (x - 0.5(a+b))^2$.

Zadanie 2 Kwadratura prostokątów: $P_{[a,b]}f = Af(\theta)$. Znajdź A, θ dla którego rząd tej kwadratury dla $I(f) = \int_a^b f$ największy. Oszacuj błąd dla takich A, θ i $f \in C^k$ z $\|f^{(k)}\|_\infty \leq 1$ dla $k = 1, 2$, oraz pokaż, że

$$I(f) - P_{[a,b]}f = C(b-a)^3 f''(\xi)$$

dla C stałej niezależnej od a, b, f.

Zadanie 3 Dla złożonej kwadratury prostokątów ($x_k = a + k * h$, $h = (b-a)/N$): $P_N f = h * \sum_{k=0}^{N-1} f(x_k + 0.5 * h)$ pokaż, że

$$E_N(f) = \int_a^b f dx - P_N f = Ch^2(b-a)f''(\xi)$$

dla pewnego $\xi \in (a, b)$ oraz C stałej niezależnej od h, a, b, f. Policz C oraz oszacuj błąd $E_N(f)$ dla f klasy C^1.

Rozwiązanie: Z poprzedniego zadania (właściwie pokrywającego się częściowow z zad 1) mamy

$$E_N f = \sum_{k=0}^{N-1} C f''(\xi_k) h^3$$

dla $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ i C stałej absolutnej (konkretna liczba) z poprzedniego zadania. Zauważmy

$$N \min_{x \in [a,b]} f''(x) \leq \sum_k f''(\xi_k) \leq N \max_{x \in [a,b]} f''(x)$$

zatem z ciągłości f''

$$\sum_k f''(\xi_k) = N * f''(\eta)$$

dla pewnego η z $[a, b]$. To daje

$$E_N f = C * N * h * h^2 f''(\eta) = C(b-a)h^2 f''(\eta) = C(b-a)^3 N^{-2} f''(\eta)$$

jeśli policzymy dobrze C mamy dokładny wzór na błąd.

Dla $f \in C^1([a, b])$ dostajemy oszacowanie

$$|E_N f| \leq C_1 h \|f'\|_\infty.$$

(jak to pokazać?)

Zadanie 4 Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1, czyli znaleźć x_1^*, x_2^* takie, że kwadratura Qf interpolacyjna dla tych węzłów spełnia:

$$\min_{x_1,x_2\in[a,b]} \sup_{f\in F_M^1} |Q_{x_1,x_2}f - \int_a^b f dx| = \sup_{f\in F_M^1} |Qf - \int_a^b f dx|,$$

gdzie $Q_{x_1,x_2}f$ jest kwadraturą interpolacyjną opartą na 2 węzłach x_1, x_2.

Dość trudne.

Zadanie 5 Znaleźć oszacowanie błędu kwadratury interpolacyjnej Q_n dla n węzłów Czebyszewa i wagi jedynkowej.

Rozwiązanie: Rozpatrzmy wzór na błąd (tylko dla $(-1, 1)$):

$$|\int_a^b f - Q_n f| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \int_{-1}^1 |\Pi(x - x_k)| dx$$

gdzie $(x_k)_k$ zera T_n n-tego wielomianu Czebyszewa ale korzystamy z oszacowania $\|\Pi(x - x_k)\|_\infty = \|T_n(x)2^{-n+1}\|_\infty = 2^{-n+1}\quad n \geq 1$ stosujemy to oszacowanie dostając:

$$|\int_a^b f - Q_n f| \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} \int_{-1}^1 2^{-n+1} dx \leq \frac{\|f^{(n)}\|_\infty}{n!} 2^{-n+2}$$

Dla dowolnego odcinka (a, b) dochodzi skalowanie przez $(0.5(b-a))^{n+1}$ (dlaczego?).

Zadanie 6 Dla kwadratury Newtona-Cotesa, udowodnij, że rząd takiej kwadratury dla nieparzystej ilości węzłów $n + 1$ wynosi co najmniej $n + 2$.

Wskazówka Rząd wynosi co najmniej $n + 1$ bo to kwadratura interpolacyjna, wystarczy dalej popatrzeć na wielomian stopnia $n+1$ $w = \Pi_{k=0}^n(x - x_k)$ dla x_k węzłów kwadratury i zauważyć że błąd kwadratury dla tego wielomianu wynosi zero dla nieparzystej ilości węzłów równoodległych (dlaczego?)

Zadanie 7 Pokaż że jeśli kwadratura na $n + 1$ punktach ma rząd większy od $n + 1$ to jest interpolacyjna.

Rozwiązanie: Rząd kwadratury $Q_n f = \sum_k A_k f(x_k)$ co najmniej $n + 1$ daje:

$$Q_n x^k = \sum_{j=0}^n A_j x_j^k = \int_a^b x^k \rho dx =: F_k \quad k = 0, \ldots, n$$

ale to jest układ

$$V\vec{A} = \vec{F}$$

dla $\vec{A} = (A_0, \dots, A_n)^T$ z wektorem prawej strony $\vec{F} = (F_0, \dots, F_n)^T$ i z macierzą

$$V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & & & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

czyli z macierzą Vandermonde'a transponowaną, czyli nieosobliwą (dla różnych węzłów a u nas tak jest) zatem ten układ ma jednoznaczne rozwiązanie. Więc istnieje tylko jedna kwadratura o danych węzłach o rzędzie co najmniej $n+1$, a wiemy (wykład) że takową jest kwadratura interpolacyjna.

Inaczej, dla l_k wielomianu bazowego Lagrange'a związanego z k-tym węzłem całka z l_k jest równa kwadraturze od l_k bo to wielomian stopnia n, ale ta całka to k-ty współczynnik kwadratury. Zatem mamy tylko jedną kwadraturę rzędu co najmniej $n+1$ opartą na $n+1$ węzłach - interpolacyjną.

Zadanie 8 Znajdź kwadraturę dla $\int_a^b f$ opartą na dwóch punktach (a) dowolnych (b) w tym lewym końcu - o maksymalnym rzędzie.

Rozwiązanie: Metoda współczynników nieoznaczonych: (a) szukamy kwadratury postaci:

$$Qf = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$$

i podstawiamy do

$$Qx^k = A_1 x_1^k + A_2 x_2^k = \int_a^b x^k dx \quad k = 0, 1, 2, 3$$

- szukamy x_k, A_k tak by jak najwięcej równań było spełnionych (wiemy że max 4 u nas bo dla $(x - x_1)^2 (x - x_2)^2$ kwadratura da zero a całka dodatnia). Mamy 4 niewiadome i 4 równania po obliczeniach wyjdą symetryczne względem środka węzły i wagi $A_1 = A_2 = 0.5(b - a)$.

Ta metoda sprawdzi się też w podpunkcie (b) - tu mamy 3 niewiadome więc 3 pierwsze równania będą spełnione (ale trzeba formalnie kolejne sprawdzić albo wiedzieć że na pewno nie jest spełnione).

Inne rozwiązanie (a) to skorzystanie z wiedzy z wykładu, że taką kwadraturą będzie kwadrarura Gaussa oparta o 2 punkty bo ona ma max rząd równy cztery.

Zadanie 9 Znamy N węzłów i współczynniki kwadratury dla $\int_{-1}^1 f$ oraz oszacowanie błędu typu $|Qf - I(f)| \leq C/N^p$ dla $f \in C^r([-1, 1])$, jak znaleźć analogiczną kwadraturę na $[a, b]$ dla $\int_a^b f$ oraz oszacowanie błędu dla $f \in C^r([a, b])$?

Zadanie 10 Znajdź kwadratury Gaussa dla $\int_{-1}^1 f$ oparte na dwóch: G_2 i trzech punktach G_3 dla $\int_a^b f$.

Rozwiązanie: Kwadratura Gaussa to kwadratura interpolacyjna o węzłach które są zerami odpowiedniego wielomianu ortogonalnego tu w $L^2([a,b])$. Trzeba znaleźć 2gi i 3ci wielomian ortogonalny w $L^2(-1,1)$ i potem liniowo przenieś wynik. (albo od razu na $[a,b]$ co rachunkowo trudniejsze). Wielomiany ortogonalne z wagą to wielomiany Legendre'a i można skorzystać z gotowych wzorów na regułę trójczłonową - albo pracowicie liczyć- można zastosować ortogonalizację Gramma-Schmidta np. do $(1, x, x^2, x^3)$ - też np. na $(-1,1)$ co daje się porachować: $L_0 = 1, L_1 = x$ to od razu mamy, (korzystamy że waga symetryczna więc parzyste wielomiany ortogonalne muszą być funkcją parzystą, a nieparzyste nieparzystą)

$$L_2 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 L_0 dx}{\int_{-1}^{1} L_0^2 dx} L_0 = x^2 - \frac{\int_{-1}^{1} x^2 dx}{\int_{-1}^{1} dx} 1 = x^2 - \frac{1}{3}$$

zatem węzły $-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$ a współczynniki równe jeden;

$$G_2 f = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}) \approx \int_{-1}^{1} f dx.$$

Zadanie 11 Pokaż że jeśli waga symetryczna względem środka odcinka to węzły kwadratury Gaussa też symetryczne względem środka.

Zadanie 12 Niech p_k ciąg wielomianów ortogonalnych w $(f,g) = \int_{-1}^{1} fg\rho\, dx$ dla ρ wagi parzystej (symetrycznej). Pokaż, że $p_k(0) = 0$ wiw k nieparzyste.

Wsk: Pierwiastki wielomianu są wtedy symetryczne względem zera.

Zadanie 13 Udowodnij, że wielomiany Czebyszewa są ortogonalne w L^2 na $[-1,1]$ z wagą $1/\sqrt{1+x^2}$. Policz współczynniki kwadratury Gaussa-Czebyszewa (kwadratura Gaussa dla $\int_{-1}^{1} f(t)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$) wiedząc, że wszystkie są sobie równe (to trudne i nieoczywiste...)

Zadanie 14 Rozpatrzmy kwadraturę opartą na $N+1$ węzłach wśród nich lewy koniec przedziału. Jaki może ona mieć max rząd?

Zadanie 15 Znajdź kwadraturę oparta na $-1, a, 1$ o max rzędzie dla całki po $[-1,1]$ z waga jeden dla C stałej niezależnej od a, b, f

Zadanie 16 Znajdź kwadraturę oparta na $-1, a$ o max rzędzie dla całki po $[-1,1]$ z waga jeden dla C stałej niezależnej od a, b, f

Zadanie 17 Kwadratura: $Qf = Af(\theta)$ dla $\int_0^1 f(t)(t+1)\, dt$. Znajdź A, θ dla którego rząd tej kwadratury jest największy. Oszacuj błąd dla takich A, θ i $f \in C^k$ z $\|f^{(k)}\|_\infty \leq 1$ dla $k = 1, 2$.

Zadanie 18 Dla wagi ω takiej, że $\omega(x) = \omega(-x)$ i

$$\int_{-2}^{2} x^{2k}\omega \, dx = 1 \quad k \leq 8$$

znajdź 4 kolejne wielomiany ortogonalne $x^k + \ldots$ w $L^2_\omega(-2,2)$ oraz węzły i współczynniki kwadratury Gaussa rzędu cztery dla $\int_{-2}^{2} f\omega \, dx$