Seria zadań domowych. Równania nieliniowe

Zadanie 1 Dla równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$

(a) pokaż że istnieje rozwiązanie $x^* \in [0, 1000]$

(b) określ czy rozwiązanie jest jednoznaczne na $[0, 1000]$

(c) zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego x_0 z $[0, 1000]$.

(d) oszacuj błąd dla 20-tej iteracji tej metody dla $x_0 = 400$ tzn oszacuj $|x_{20} - x^*|$.

Zadanie 2 Dla równania $\frac{1}{x^2+2} - 10 + 3 * x = 0$ określ czy metoda bisekcji startująca z odcinka $[0, 10]$ będzie zbieżna? Jeśli tak to określ n dla których x_n n-ta iteracja metody bisekcji (środek n-tego odcinka) spełnia $|x_n - x^*| \leq 10^{-1}$.

Zadanie 3 Czy metoda Newtona zastosowana do równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$ będzie zbieżna lokalnie kwadratowo dla rozwiązania tego równania na $[0, 1000]$?

Czy metoda Newtona zastosowana do tego równania z $y_0 = 400$ będzie zbieżna? Jeśli tak to oszacuj błąd $|y_4 - x^*|$ dla y_k k-tej iteracji metody Newtona z $y_0 = 400$.

Wsk: W 2gim pytaniu pomocny może być wzór na błąd metody Newtona zachodzący przy odpowiednich założeniach $y_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2 * f'(y_n)}(y_n - x^*)^2$ z ξ pomiędzy x^* i y_n .

Zadanie 4 Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) - 23$$

zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = -23$.

Zadanie 5 Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x^*) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* tego równania.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ metoda Newtona zbiegnie do x^*.
- określ czy zachodzi lokalna zbieżność kwadratowa tzn czy istnieje otoczenie x^* takie, że dla x_0 z tego otoczenia metoda jest zbieżna kwadratowo.

- Zaproponuj implementacje jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octavie).

Zadanie 6 Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+2), \\ g(x) &= (x+2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest $x^* = -2$ zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 7 Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1,4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e-7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e-6$? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 8 Dla układu równań

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^2 - 1 \\ g(x,y) &= x - 2y \end{aligned}$$

policz pierwszą iterację metody Newtona z $(x_0, y_0) = (1,1)$. Czy metoda Newtona jest w przypadku tego układu zbieżna lokalnie kwadratowo (dla rozwiązania o obu składowych dodatnich)?

Zadanie 9 Rozpatrzmy równanie $f(x^*) = 0$ dla f gładkiej tzn. w $C^\infty(\mathbb{R})$, ściśle wypukłej, i takiej że $f'(x^*) = 0$. Zakładamy że możemy policzyć wartość i pochodną funkcji w dowolnym punkcie. Określ która z metod iteracyjnych jest sens użyć do rozwiązania tego równania:

- metodę Newtona
- metodę bisekcji
- metodę siecznych

Zadanie 10 Do rozwiązania równań

(a) $f = (x - 2.1) * (\sin(3x) + 5x^2)$

(b) $g = x * (x - 2.1)^2$

(c) $h = \sin(x - 2.1)$

zastosowano metodę Newtona otrzymując dla $x_0 = 3$ ciągi zbieżne do $x^* = 2.1$ z następującymi błędami umieszczonymi w tabelce (pierwsza kolumna to numer iteracji) której fragment jest poniżej zamieszczony:

2	0.509	0.36	0.305
3	0.277	0.0164	0.057
4	0.146	$1.48e-06$	0.00208
5	0.0753	0	$3.25e-06$
6	0.0383	0	$7.94e-12$
7	0.0193	0	0

Określ która kolumna odpowiada której funkcji.

Wsk: Warto określić rząd lokalnej zbieżności każdej funkcji do 2.1 na bazie wiedzy z wykładu/ćwiczeń (liniowa, kwadratowa lub kubiczna) i porównać z szybkościa zbieżności, która wynika z kolumn tabelki.

Zadanie 11 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= x - 0.1 * \sin(1 + x + 3 * y) = 0 \\
g(x,y) &= 10 * y - \frac{1}{(x + y + 10)} = 0
\end{aligned}
$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: to zadanie można rozwiązać znając wzór na normę macierzy

$\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Możecie Państwo przyjąć że znamy powyższy wzór na tę normę.

Zadanie 12 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$
10 * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(1 + x - y) \\ \frac{1}{(x+y+10)} \end{pmatrix} = 0
$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: Równanie można przedstawić w postaci $\vec{x} = B * [f(\vec{x}), g(\vec{x})]^T]$ dla pewnej macierzy B wymiaru 2×2. Możecie Państwo przyjąć że znamy wzór na normę macierzową supremum.

Zadanie 13 Do rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2-5=0 \\ g(x,y) &= (y+2)(x^3-1)=0 \end{aligned}$$

zastosowano metodę Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(a) Wykonaj 1 iteracje metody.

(b) Dla odpowiednich przybliżen początkowych można otrzymać ciągi zbieżne do rozwiązań $(1,-2), (1,2), (-1,-2)$. Określ o ile to możliwe wykładniki zbieżności metody Newtona do tych rozwiązań (powołując się na wykład).

Zadanie 14 (trudne) Udowodnij, że metoda przybliżonego wyznaczania $\sqrt{a}$, dla $a > 0$. zadana wzorem:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3 * a)}{3x_n^2 + a}$$

zwraca ciąg zbieżny do $\sqrt{a}$. Podaj możliwie szerokie ograniczenia na wybór punktu startowego $x_0 > 0$ dla którego zachodzi zbieżność. Udowodnij, że wykładnik zbieżności jest równy trzy.

2.1 Układy równań liniowych metody iteracyjne.

Zadanie 1 Niech A macierz symetryczna dodatnio określona taka, że jej wartości włąsne leżą w $[0.5, 1]$. Rozpatrzmy metodę iteracyjnę:

$$x^{(n+1)} = y^{(n)} - 0.4 * (Ay^{(n)} - b)$$

gdzie $y^{(n)} = x^{(n)} - 0.3*(Ax^{(n)} - b)$. Czy ta metoda jest zbieżna do rzowiążania $Ax = b$, jeśli tak oszacuj szybkość zbieżności w normie drugiej.

Zadanie 2 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne są w przedziale $[c, d]$. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^* rozwiązania $Ax^* = b$. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$ oraz w normie energetycznej $\|x\|_A = \sqrt{x^T Ax}$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w odpowiednich normach największa.

Zadanie 3 Niech $A = A^T > 0$ taka że jej wartości własne to $\{1, 2, \ldots, 10\}$. Chcemy rozwiązać układ $Ax^* = b$ przy pomocy metody Richardsona i znamy x^0 takie że $x^0 - x^*$ jest ortogonalne do wektorów własnych dla pierwszych czterech wartości własnych. Znajdź τ takie aby metoda Richardsona: $x^{k+1} = x^k - \tau(Ax^k - b)$ była zbieżna do x^*. Oszacuj szybkość zbieżności w normie $\|\cdot\|_2$. Wyznacz wartości parametru dla których szybkość zbieżności w normie drugiej będzie największa.

Zadanie 4 Udowodnij że dla macierzy $A = (a_{ij})_{i,j}$ silnie diagonalnie dominującej ($\rho|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ z $0 < \rho < 1$) metoda Gaussa-Seidla rozwiązywania równania $Ax = b$:

$$x_i^{(n+1)} = a_{ii}^{-1}(-\sum_{j=1}^{k-1} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j=k+1}^{n} a_{ij}x_j^{(n)} + b_i) \quad i = 1, \ldots, n$$

jest zbieżna w normie $\|\cdot\|_\infty$.

Zadanie 5 Niech A nieosobliwa. Do rozwiązania układu $A^T Ax = b$ zastosowano następującą metodę iteracyjną:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_k r^k \qquad r^k = b - A^T Ax^k$$

dla α_k minimalizującego funkcję $g(\tau) = \|A^T A(x^k + \tau r^k) - b\|_2^2$. Oblicz wzór na α_k oraz oszacuj $\|A^T Ax^k - b\|_2 / \|A^T Ax^0 - b\|_2$. Czy metoda jest zbieżna?

Zadanie 6 Udowodnij, że jeśli A ma wartości własne o częściach rzeczywistych większych od zero to istnieją dodatnie wartości parametru τ dla których metoda Richardsona rozwiązywania $Ax = b$ jest zbieżna. Oszacuj zbiór tych wartości τ dla A macierzy o normie macierzowej drugiej równej jeden.

Rozdział 3

Kolokwia, egzamin

Contents