Interpolacja. Aproksymacja. Kwadratury.

Interpolacja wielomianowa

Zadanie 1 Dla funkcji f wielomian interpolacyjny Lagrange'a w węzłach $(-1, 0, 1, 2, 3, 4)$ ma w bazie Newtona dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3)$ następujące współczynniki $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a w tych samych węzłach i tej samej bazie dla funkcji:

$$g(x) = \sqrt{2} + f(x) - \frac{1}{4!}\Pi_{k=-1}^{4}(x-k)$$

WSK: Zarówno różnice dzielone jak i operator interpolacji Lagrange'a są liniowe.

Zadanie 2 Dla wielomianów $f_1(x) = x^5 + x^2 - 10$ i $f_2(x) = \frac{1}{4!}\Pi_{k=-1}^{3}(x-k) - \sqrt{2} + \frac{128}{7}$ znajdź współczynniki tych wielomianów

- w bazie Lagrange'a przestrzeni $\mathcal{P}_5$ dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3, 4)$
- w bazie Newtona $\mathcal{P}_5$ dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3)$

Zadanie 3 Dla funkcji $f(x) = x^7 - 7 * x$ znajdź w wielomian możliwie niskiego stopnia interpolujący tę funkcję w węzłach o krotności dwa $\{-1, 0, 1\}$ za pomocą algorytmu różnic dzielonych, tzn. $w(x_j) = f(x_j)$ i $w'(x_j) = f'(x_j)$ dla x_j jednego z trzech węzłów. Oszacuj błąd w normie maksimum na $[-1, 2]$.

Zadanie 4 Dla funkcji $f(x) = x^4 - 7 * x$ znajdź wielomian p stopnie nie większego od trzech taki, że

$$\|f - p\|_{\infty,[-1,3]} = \inf_{s \in P_3} \|f - s\|_{\infty,[-1,3]}$$

czy jest on wyznaczony jednoznacznie? Podaj ile wynosi $\|f - p\|_{\infty,[-1,3]}$. Tu P_3 wielomiany stopnia ≤ 3.

Zadanie 5 (trudne) Pokaż, że dla różnych $n+1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^{n}$ prawdziwy jest wzór na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:

$$f[x_0, \ldots, x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j}(x_i - x_j)}$$

Zadanie 6 (trudne) Pokaż że dla dwóch różnych punktów x_0, x_1 i funkcji klasy C^1 prawdziwy jest wzór:

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'((1-s)x_0 + sx_1)\, ds$$

Zadanie 7 (trudne) Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a,b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a,b])$ w tych węzłach. Pokaż oszacowania

- normy operatora interpolacji
$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (\sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]})\|f\|_{\infty,[a,b]}.$$
- dla dowolnego $w \in P_n$
$$\|f - L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (1 + \sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]})\|f - w\|_{\infty,[a,b]}$$
dla P_n przestrzeni wielomianów stopnie nie większego od n.

Zadanie 8 (trudne) Pokaż, że dla różnych $n+1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^n$ prawdziwy jest wzór całkowy Hermite'a-Genocchiego na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:
$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \int_{S_n} f^{(n)}(s_0 x_0 + s_1 x_1 + \dots s_n x_n)\, ds$$
gdzie S_n sympleks jednostkowy w $n+1$ wymiarach tzn.
$$S_n = \{u = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : s_i \geq 0,\ \sum_{k=0}^{n} s_i = 1\}.$$
Wsk: Poprzednie zadanie + indukcja korzystająca z przemienności węzłów w różnicy dzielonej tzn. $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}] = f[x_1, \dots, x_n]$. Tu $(i_0, \dots, i_n)$ permutacja zbioru $\{0, \dots, n\}$. Jeśli Państwo sami tego nie potraficie udowodnić, to rozwiązanie można znaleźć w książce Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna, WNT.

Zadanie 9 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ definiujemy funkcję ciągłą $s \in C([a,b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:
$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0, \dots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że
$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\, h^3.$$

Aproksymacja jednostajna i w normie Hilbertowskiej.

Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na $[a,b]$ to element najlepszej aproksymacji w normie $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$ dla f w $\mathcal{P}_p$ przestrzeni wielomianów stopnia $\leq p$. Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji dla funkcji f na $[a,b]$ w normie $\|\cdot\|$ to element najlepszej aproksymacji w tej normie dla f w $\mathcal{P}_p$. Wielomian liniowy, kwadratowy, kubiczny oznacza element $\mathcal{P}_k$ dla odpowiednio $k = 1,2,3$.

Zadanie 10 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos(x))|f(x)|^2\,dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 11 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_3 : w(0) = 1\}$. Znajdź dla $f = \sin(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g(t)|^2\,dt + |g(0)|^2$ i $\mathcal{P}_3$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny i że $V = v_0 + V_0$ dla pewnego v_0 i V_0 odpowiedniej przestrzeni liniowej tzn. jest przestrzenią afiniczną.

Zadanie 12 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_4 : w(-1) = 0\}$. Znajdź dla $f = \cos(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g'(t)|^2\,dt$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny.

Zadanie 13 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to P_k jest odpowiednio funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy gdy $k > 0$ parzyste. Tu P_k k-ty wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 14 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to $P_{2k+1}(0) = 0$ a $P_{2k}(0) \neq 0$ dla P_k k-tego wielomianu ortogonalnego w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 15 Znajdź 3 pierwsze wielomiany ortogonalne w $L^2_\rho(-1,1)$ dla wagi $\rho = 1+|x|$. Znadź element najlepszej aprosymacji w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 dla $f(x) = \sin(x)$ w tej przestrzeni. Wystarczy znaleźć współczynniki w jakiejkolwiek bazie tej przestrzeni.

Zadanie 16 Dla $f(x) = |x-6|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v-f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$.

Zadanie 17 Dla $f(x) = x^2 - 10x + 1$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v-f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 18 Dla $f(x) = \max(0, 2*x)$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1,2]$ tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v-f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 19 Pokaż że jeśli f funkcja parzysta (nieparzysta) to wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na odcinku $[-a,a]$ ($a > 0$) dla niej jest wielomianem parzystym (nieparzystym).

Zadanie 20 Dla $f(x) = |x|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_3$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,1]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v-f\|_{\infty,[-1,1]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$. Wsk: Pokaż że skoro f parzysta i odcinek symetryczny to p też parzysta.

Zadanie 21 Czy istnieje takie L że wielomianem najlepszej aproksymacji jednostajnej w $\mathcal{P}_9$ na $[0,L]$ dla $f(x) = \sin(\pi x)$ będzie $w_f = 0$? WSK: określ warunek na alternans....

Zadanie 22 Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kubiczny wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1,1]$.

Zadanie 23 Dla $f(x) = (x-2)^3 - 3$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[0,4]$.

Zadanie 24 (trudne) Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1,1]$.

Zadanie 25
(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a,b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n+1$ punktach na $[a,b]$.

(b) (trudne - ale było na wykładzie) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

Splajny. Kwadratury

Zadanie 26 (trudne) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f'(a) = f'(b) = f(x_k) = 0 \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\, dx = 0.$$

Zadanie 27 (trudne) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech V przestrzeń splajnów kubicznych okresowych na tym podziale odcinka czyli przestrzeń funkcji $s \in C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będących wielomianami kubicznymi takie, że

$$s^{(r)}(a) = s^{(r)}(b) \quad r = 0, 1, 2.$$

Wyznacz wymiar przestrzeni V.

Zadanie 28 (trudne) Znajdź wzory na funkcję B klasy $C^2(R)$ taką, że B jest wielomianem stopnia nie większego od trzech na każdym odcinku $[k, k + 1)$ dla k całkowitego, $B(x) = 0$ dla $x \in (-\infty, -2] \cap [2, \infty)$, $B(0) = 4$ i $B(-1) = B(1) = 1$. Czy funkcja jest wyznaczona jednoznacznie? **Wsk:** Funkcja jest parzysta i może pomóc interpolacja Hermite'a na dwóch węzłach.

Zadanie 29 (trudne) Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły równoodległe: $a = x_0 < \ldots < x_N = b$ z $x_k = a + k * h$ i $h = (b - a)/N$. Dodajemy dwa węzły poza odcinkiem $x_{-1} = a - h$ i $x_{N+1} = b + h$. Wprowadzamy $B_j(x) = B((x - x_j)/h)$ dla B z poprzedniego zadania. Pokaż, że $\{B_j\}_{j=-1,0,1,\ldots,N,N+1}$ tworzą bazę splajnów kubicznych obciętych do $[a, b]$.

Zadanie 30 (trudne) Rozpatrzmy funkcję f i s jej splajn kubiczny naturalny interpolacyjny dla zadanego podziału $[a, b]$: $a = x_0 < \ldots < x_n = b$. Niech $\hat{s}$ splajn interpolacyjny kubiczny naturalny dla $\hat{f}$ takiego, że w węzłach $|f(x_k) - \hat{f}(x_k)| \leq \delta$. Oszacuj $\|s - \hat{s}\|_\infty$.

Wsk: Można się przyjrzeć dowodowi oszacowania błędu dla splajny kubicznego interpolacyjnego naturalnego.

Zadanie 31 (trudne) Rozpatrzmy funkcję $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 8^{-k}\cos(2^k x)$. Rozpatrzmy obcięcie tego szeregu: $f_M(x) = \sum_{k=0}^{M} 8^{-k}\cos(2^k x)$. Niech $s_{M,N}$ splajn kubiczny interpolacyjny naturalny na podziale równomiernym odcinka $[0,1]$ tzn. $x_k = k * h$ dla $h = 1/N$ taki, że $f_M(x_k) = s_{M,N}(x_k)$.

- Dla zadanego δ wyznacz najmniejsze $M = M(\delta)$ takie, aby $|f_M(x) - f(x)| \leq \delta$ dla $x \in [0,1]$.
- Oszacuj $|f^{(2)}(x)|$ dla $x \in [0,1]$.
- Dla zadanego ϵ wyznacz N i M takie, że

$$\|f - s_{M,N}\|_{\infty,[0,1]} \leq \epsilon.$$

Zadanie 32 Czy istnieje splajn kubiczny s naturalny na $[-3,2]$ ($s''(-3) = s''(2) = 0$ tzn 2 pochodna w końcach równa zero) dla węzłów $-3,-2,-1,0,1,2$ spełniający: $s(-3) = s(-2) = s(-1) = s(2) = 2$ i taki, że $s_{|[0,1]} = 2 * t^2$?

Zadanie 33 Czy istnieje splajn kwadratowy o minimalnym nośniku tzn. $s \in S_2^1([-3,3])$ dla węzłów $x_k = -3+2*k$, $k = 0,1,2$ (tzn. s obcięte do odcinków (x_{k-1}, x_k) jest wielomianem kwadratowym i jest klasy C^1 na $[-3,3]$), by s była parzysta, tj. $s(x) = s(-x)$, $s(-3) = s'(-3) = 0$, oraz $s(-1) = s(1) = 4$. Jeśli tak to wyznacz współczynniki s obciętego do pododcinków tzn $s_k = s_{|(x_k,x_{k+1})}$ w dowolnej bazie wielomianów kwadratowych na odcinku (x_k, x_{k+1}). (Z symetryczności wystarczy na $[-3,1],[-1,1]$).

Zadanie 34 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$ postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla A, B, C współczynników i c punktu w (a,b).

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd $|Q(f) - I(f)|$ dla $f \in C^3([a,b])$ z $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dla $x \in [a,b]$.

Zadanie 35 Szukamy kwadratury na $n+1$ punktach o maksymalnym rzędzie dla $I(f) = \int_a^b f\,dt$ postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

dla $x_k \in (a,b]$.

Wyznacz jaki taka kwadratura ma rząd i czy węzły x_k wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki $Q_2 f$ tzn. podaj taką kwadraturę dla $n = 2$.

Zadanie 36 Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn. $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$ to węzły kwadratury Gaussa dla $\int_a^b f(t)\rho(t)\,dt$ są też symetryczne względem $\frac{a+b}{2}$.

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi $\rho(x) = (1 + x^2) * \cos(x)$ na $[-1, 1]$.

Zadanie 37 Podaj najmniejsze N takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka) $P_N f$ na $[-100, 100]$ a $\int_{-100}^{100} f\,dt$ dla $f(x) = \sin(x)$ był mniejszy od 10^{-9}.

Zadanie 38 (trudne) Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a, b]) : \max_{x\in[a,b]} |f^{(r+1)}(x)| \leq M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1, tzn. taką $Q^* \in Kw_2$ dla Kw_2 zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla $S(f)$, że

$$\min_{Q\in Kw_2} \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q(f)| \quad = \quad \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka $[a, b]$, czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem b.

Zadanie 39 (trudne) Pokaż, że jeśli G_{n+1} jest kwadraturą Gaussa na $n + 1$ różnych punktach w $\{x_k\}_{k=0}^n$ w (a, b) dla $I(f) = \int_a^b f\,\rho\,dx$ (ρ waga) to

$$G_{n+1}f = \int_a^b p_{2n+2,f}(x)\,dx$$

gdzie $p_{2n+2,f}$ jest wielomianem Hermite'a f dla węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n$ z podwojoną krotnością dwa tzn. $p \in P_{2n+2}$ i $f^{(k)}(x_j) = p^{(k)}_{2n+2,f}(x_j)$ dla $k = 0, 1$ i $j = 0, \dots, n$.

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2,f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n + 2)!}\Pi_{j=0}^n (t - x_j)^2 \tag{1}$$

dla pewnego η zależnego w ogólności od t, (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje $\xi \in [a, b]$ takie, że

$$I(f) - G_{n+1}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \int_a^b \Pi_{j=0}^n (x - x_j)^2 \rho \, dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!} \|P_{n+1}\|^2_{L^2_\rho(a,b)}$$

o ile $f \in C^{2n+2}$. Tu $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \ldots$ to $n+1$ wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(a, b)$.

Zadanie 40 Rozpatrzmy kwadraturę o różnych węzłach $(x_k)_{k=0}^N$ w (a, b) przybliżającą całke $I_\rho(f) = \int_a^b f\rho \, dx$ postaci:

$$Qf = \sum_{k=0}^{n} (A_k f(x_k) + B_k f'(x_k))$$

tzn. wykorzystującą wartości funkcji i jej pochodnej w węzłach. Określ jaki może być maksymalnie rząd takiej kwadratury.

Wsk: można skorzystać z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a (1) podanego w zadaniu 39.