

Seria zadań domowych. Numeryczna algebra liniowa cd

Tzn.: układy równań liniowych cd, uwarunkowanie i normy macierzy cd, LZNK

Zad 1 Znajdź oszacowania (postaci $O(n^p)$ dla $p = 0, 1, 2, 3$ z możliwie małym p niezależnym od Q) współczynnika uwarunkowania dla dowolnej macierzy ortogonalnej Q $n \times n$ (tzn. $Q^{-1} = Q^T$) w normach: drugiej, maximum i pierwszej. (indukowanych)

Zad 2 Niech $R_1 = (r_{ij})$ macierz górnotrójkątna $n \times n$ taka że $r_{ij} = 1$ $j \geq i$ czyli macierz górnotrójkątna ze wszystkimi elementami na diagonalu i nad-diagonalą równymi jeden, a $R_2 = R_1 - 2 * I$ też górnotrójkątna ale z jedynkami nad-diagonalą ale minus jeden na diagonalu. Policz współczynnik uwarunkowania R_k w normie pierwszej. Czy zależy od n ? A jeśli tak to jak?

Zad 3 W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy A otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dla H_1 macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 1)^T$.

- Wyznacz wektor Householdera dla macierzy Householdera H_2 taki, że $H_2 H_1 A = R$ macierz górnotrójkątna.
- Policz 3-cią kolumnę macierzy A .
- Policz macierz R .
- Wyznacz drugą kolumnę macierzy A^{-1} korzystając z otrzymanego rozkładu QR macierzy A .

Zad 4 W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy A otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

dla H_1 macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 0, 1)^T$.

- określ czy A jest kolumnami regularna
- Wykonaj kolejny krok metody Householdera tzn. policz macierz R prostokątna górnotrójkątna z głównym minorem nieosobliwym i wyznacz wektor Householdera dla macierzy Householdera H_2 takie, że $H_2 H_1 A = R$.

- (c) Policz 2-gą kolumnę macierzy A .
 (d) Rozwiąż LZNK z macierzą A i wektorem.

$$b = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Zad 5 Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie H macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że H nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), \vec{b} wektor wymiaru m i a skalar.

- (a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \dots$
 (b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na a , aby A była nieosobliwa (dla zadanych \vec{b} i \vec{x})

Zad 6 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b , parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^m |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^m |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadanie miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zad 7 (trudne) Rozpatrzmy układ:

$$Ax = b$$

z

$$A = \begin{pmatrix} D_B & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie D_B macierz blokowo diagonalna wymiaru $k * p \times k * p$ z k identycznymi blokami z macierzą B $p \times p$ symetryczną dodatnio określoną jako bloki diagonalni blokowej tzn

$$D_B = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

C macierz kolumnami regularna $k * p \times q$.

Pokaż, że

- (a) A nieosobliwa tzn układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego b
- (b) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $k = p$ a $q \leq p$.
- (c) Pokaż że założenie dodatniej określoności B niezbędne by mieć pewność co do nieosobliwości A tzn. np. znajdź przykład dla $k = q = 1$, $p = 2$ takich danych że B symetryczna ale NIE dodatnio określona ale nieosobliwa (np. silnie diagonalnie dominująca) a A osobliwa. (WSK: najprościej wziąć B diagonalną...)