Aproksymacja jednostajna i w normie Hilberowskiej. Kwadratury

Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na $[a,b]$ to element najlepszej aproksymacji w normie $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$ dla f w $\mathcal{P}_p$ przestrzeni wielomianów stopnia $\leq p$. Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji dla funkcji f na $[a,b]$ w normie $\|\cdot\|$ to element najlepszej aproksymacji w tej normie dla f w $\mathcal{P}_p$. Wielomian liniowy, kwadratowy, kubiczny oznacza element $\mathcal{P}_k$ dla odpowiednio $k = 1, 2, 3$.

Zadanie 1 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2 + \cos(x))|f(x)|^2 \, dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 2 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_3 : w(0) = 1\}$. Znajdź dla $f = \sin(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g(t)|^2 \, dt + |g(0)|^2$ i $\mathcal{P}_3$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny i że $V = v_0 + V_0$ dla pewnego v_0 i V_0 odpowiedniej przestrzeni liniowej tzn. jest przestrzenią afiniczną.

Zadanie 3 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_4 : w(-1) = 0\}$. Znajdź dla $f = \cos(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g'(t)|^2 \, dt$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny.

Zadanie 4 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to P_k jest odpowiednio funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy gdy $k > 0$ parzyste. Tu P_k k-ty wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 5 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to $P_{2k+1}(0) = 0$ a $P_{2k}(0) \neq 0$ dla P_k k-tego wielomianu ortogonalnego w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 6 Znajdź 3 pierwsze wielomiany ortogonalne w $L^2_\rho(-1,1)$ dla wagi $\rho = 1+|x|$. Znadź element najlepszej aprosymacji w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 dla $f(x) = \sin(x)$ w tej przestrzeni. Wystarczy znaleźć współczynniki w jakiejkolwiek bazie tej przestrzeni.

Zadanie 7 Dla $f(x) = |x|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$.

Zadanie 8 Dla $f(x) = x^2 - 10x + 1$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 9 Czy istnieje takie L że wielomianem najlepszej aproksymacji jednostajnej w $\mathcal{P}_9$ na $[0, L]$ dla $f(x) = \sin(\pi x)$ będzie $w_f = 0$? WSK: określ warunek na alternans....

Zadanie 10 Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kubiczny wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1, 1]$.

Zadanie 11 Dla $f(x) = (x - 2)^3 - 3$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[0, 4]$.

Zadanie 12 (trudne) Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1, 1]$.

Zadanie 13

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x^n_k\}^n_{k=0} \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x^n_k) = f(x^n_k)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 14 Pokaż, że kwadratura interpolacyjna przybliżająca $\int_a^b f dx$ oparta na 2 węzłach dwukrotnych a, b (tzn. $Qf = \int_a^b H_4 f dx$ dla $H_4 f$ wielomianu Hermite'a opartego na 2 węzłach dwukrotnych a, b) ma postać:

$$Qf = A_1 f(a) + A_2 f'(a) + A_3 f(b) + A_4 f'(b),$$

oraz spełnia dla $f \in C^4([a,b])$ nierówność:

$$| \int_a^b f dx - Qf| \leq C_0 \|f^{(4)}\|_{\infty,[a,b]}(b-a)^5,$$

gdzie C_0 stała absolutna, tzn. niezależna od f, f', a, b, którą należy wyznaczyć.

Czy istnieje $\eta \in [a,b]$ taki, że

$$\int_a^b f dx - Qf = C_0 f^{(4)}(\eta)(b-a)^5?$$

Jaki rząd ma ta kwadratura?

WSK: policz całkę z prawej strony wzoru na błąd interpolacji Hermite'a i odpowiednio oszacuj...

Zadanie 15 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu dla $I(f) = \int_a^b f(x)(x - \frac{a+b}{2})^2 dx$ postaci

$$Qf = Af(a) + Bf(b) + Cf(c)$$

dla A, B, C współczynników i c punktu w (a,b).

Podaj rząd tej kwadratury i oszacuj błąd $|Q(f) - I(f)|$ dla $f \in C^3([a,b])$ z $|f^{(3)}(x)| \leq M$ dla $x \in [a,b]$.

Zadanie 16 Szukamy kwadratury na $n+1$ punktach o maksymalnym rzędzie dla $I(f) = \int_a^b f\, dt$ postaci:

$$Q_n f = A_1 f(a) + \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)$$

dla $x_k \in (a,b]$.

Wyznacz jaki taka kwadratura ma rząd i czy węzły x_k wyznaczone są jednoznacznie.

Policz węzły i współczynniki $Q_2 f$ tzn. podaj taką kwadraturę dla $n=2$.

Zadanie 17 Pokaż, że jeśli waga jest symetryczna względem środka odcinka tzn. $\rho(x + \frac{a+b}{2}) = \rho(-x + \frac{a+b}{2})$ to węzły kwadratury Gaussa dla $\int_a^b f(t)\rho(t)\, dt$ są też symetryczne względem $\frac{a+b}{2}$.

Znajdź choć jeden węzeł kwadratury Gaussa opartej na 7 punktach dla wagi $\rho(x) = (1+x^2) * \cos(x)$ na $[-1,1]$.

Zadanie 18 Podaj najmniejsze N takie, że błąd pomiędzy złożoną kwadraturą prostokątów (równomierny podział odcinka) $P_N f$ na $[-100, 100]$ a $\int_{-100}^{100} f\, dt$ dla $f(x) = \sin(x)$ był mniejszy od 10^{-9}.

Zadanie 19 Oznaczenia

$$F_M^r = \{f \in C^{r+1}([a,b]) : \max_{x\in[a,b]} |f^{(r+1)}(x)| \le M\}$$

oraz

$$S(f) = \int_a^b f(x)dx.$$

Dla kwadratur interpolacyjnych opartych na 2 węzłach znaleźć węzły i postać kwadratury interpolacyjnej która minimalizuje błąd na klasie F_M^1, tzn. taką $Q^* \in Kw_2$ dla Kw_2 zbioru kwadratur interpolacyjnych na 2 punktach dla $S(f)$, że

$$\min_{Q\in Kw_2} \max_{f\in F_M^1} |S(f) - Q(f)| \quad = \quad |S(f) - Q^*(f)|.$$

W wersji prostszej, która mogła być/będzie na ćwiczeniach szukamy kwadratury interpolacyjnej minimalizującej błąd w tej klasie z dwoma węzłami symetrycznymi względem środka odcinka $[a,b]$, czy w kolejnej wersji z jednym ustalonym węzłem np. punktem b.

Zadanie 20 Pokaż, że jeśli G_{n+1} jest kwadraturą Gaussa na $n+1$ różnych punktach w $\{x_k\}_{k=0}^n$ w (a,b) dla $I(f) = \int_a^b f\,\rho\,dx$ (ρ waga) to

$$G_{n+1}f = \int_a^b p_{2n+2,f}(x)\,dx$$

gdzie $p_{2n+2,f}$ jest wielomianem Hermite'a f dla węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n$ z podwojoną krotnością dwa tzn. $p \in P_{2n+2}$ i $f^{(k)}(x_j) = p_{2n+2,f}^{(k)}(x_j)$ dla $k = 0,1$ i $j = 0,\dots,n$.

Korzystają z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a dla podwójnych węzłów:

$$f(t) - p_{2n+2,f}(t) = \frac{f^{(2n+2)}(\eta)}{(2n+2)!}\Pi_{j=0}^n (t-x_j)^2 \tag{1}$$

dla pewnego η zależnego w ogólności od t, (dowód to kolejne zadanie) pokaż, że istnieje $\xi \in [a,b]$ takie, że

$$I(f) - G_{n+1}f = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\int_a^b \Pi_{j=0}^n (x-x_j)^2 \rho\,dx = \frac{f^{(2n+2)}(\xi)}{(2n+2)!}\|P_{n+1}\|^2_{L^2_\rho(a,b)}$$

o ile $f \in C^{2n+2}$. Tu $P_{n+1}(x) = x^{n+1} + \dots$ to $n+1$ wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(a,b)$.

Zadanie 21 Rozpatrzmy kwadraturę o różnych węzłach $(x_k)_{k=0}^N$ w (a,b) przybliżającą całke $I_\rho(f) = \int_a^b f\rho\,dx$ postaci:

$$Qf = \sum_{k=0}^n (A_k f(x_k) + B_k f'(x_k))$$

tzn. wykorzystującą wartości funkcji i jej pochodnej w węzłach. Określ jaki może być maksymalnie rząd takiej kwadratury.

Wsk: można skorzystać z wzoru na błąd interpolacji Hermite'a (1) podanego w zadaniu 20.