Aproksymacja jednostajna i w normie Hilberowskiej.

Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji jednostajnej dla funkcji f na $[a,b]$ to element najlepszej aproksymacji w normie $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$ dla f w $\mathcal{P}_p$ przestrzeni wielomianów stopnia $\leq p$. Wielomian stopnia $\leq p$ najlepszej aproksymacji dla funkcji f na $[a,b]$ w normie $\|\cdot\|$ to element najlepszej aproksymacji w tej normie dla f w $\mathcal{P}_p$. Wielomian liniowy, kwadratowy, kubiczny oznacza element $\mathcal{P}_k$ dla odpowiednio $k = 1,2,3$.

Zadanie 1 Rozpatrzmy $g(x) = \sin(x)$ i zadania znalezienia wielomianów najlepszej aproksymacji dla g: $w_1 \in V_1 = P_n$ i $w_2 \in V_2 = P_{n-1}$ dla $n > 0$ w normie:

$$\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (2+\cos(x))|f(x)|^2\,dx}.$$

(a) Znajdź w_1, w_2 dla $n = 1$.

(b) Dla jakich $n > 0$ prawdą jest, że $w_1 = w_2$? Uzasadnij odpowiedź.

Zadanie 2 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_3 : w(0) = 1\}$. Znajdź dla $f = \sin(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g(t)|^2\,dt + |g(0)|^2$ i $\mathcal{P}_3$ przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 3. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny i że $V = v_0 + V_0$ dla pewnego v_0 i V_0 odpowiedniej przestrzeni liniowej tzn. jest przestrzenią afiniczną.

Zadanie 3 Niech $V = \{w \in \mathcal{P}_4 : w(-1) = 0\}$. Znajdź dla $f = \cos(x)$ taki $w_f \in V$, że

$$\|w_f - f\| = \min_{v\in V} \|v - f\|$$

dla $\|g\|^2 = \int_{-1}^{1} |g'(t)|^2\,dt$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$. Wsk: Pokaż że to norma generowana przez odpowiedni iloczyn skalarny.

Zadanie 4 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to P_k jest odpowiednio funkcją parzystą wtedy i tylko wtedy gdy $k > 0$ parzyste. Tu P_k k-ty wielomian ortogonalny w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 5 Pokaż że jeśli waga ρ jest funkcją parzystą to $P_{2k+1}(0) = 0$ a $P_{2k}(0) \neq 0$ dla P_k k-tego wielomianu ortogonalnego w $L^2_\rho(-1,1)$.

Zadanie 6 Znajdź 3 pierwsze wielomiany ortogonalne w $L^2_\rho(-1,1)$ dla wagi $\rho = 1+|x|$. Znadź element najlepszej aprosymacji w przestrzeni wielomianów stopnia ≤ 2 dla $f(x) = \sin(x)$ w tej przestrzeni. Wystarczy znaleźć współczynniki w jakiejkolwiek bazie tej przestrzeni.

Zadanie 7 Dla $f(x) = |x-6|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeń wielomianów stopnia $\leq k$.

Zadanie 8 Dla $f(x) = x^2 - 10x + 1$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 9 Dla $f(x) = \max(0, 2*x)$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_1$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1,2]$ tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,2]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,2]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.

Zadanie 10 Pokaż że jeśli f funkcja parzysta (nieparzysta) to wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na odcinku $[-a,a]$ ($a > 0$) dla niej jest wielomianem parzystym (nieparzystym).

Zadanie 11 Dla $f(x) = |x|$ znajdź $w_f \in \mathcal{P}_3$ wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej tzn.

$$\|w_f - f\|_{\infty,[-1,1]} = \min_{v\in\mathcal{P}_1} \|v - f\|_{\infty,[-1,1]}$$

dla $\|g\|_{\infty,[a,b]} = \max_{t\in[a,b]} |g(t)|$. Tu $\mathcal{P}_k$ przestrzeni wielomianów stopnie $\leq k$.
Wsk: Pokaż że skoro f parzysta i odcinek symetryczny to p też parzysta.

Zadanie 12 Czy istnieje takie L że wielomianem najlepszej aproksymacji jednostajnej w $\mathcal{P}_9$ na $[0,L]$ dla $f(x) = \sin(\pi x)$ będzie $w_f = 0$? WSK: określ warunek na alternans....

Zadanie 13 Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kubiczny wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1,1]$.

Zadanie 14 Dla $f(x) = (x-2)^3 - 3$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[0,4]$.

Zadanie 15 (trudne) Dla $f(x) = x^4 - 3x + 1$ znajdź kwadratowy wielomian najlepszej aproksymacji jednostajnej na $[-1, 1]$.

Zadanie 16

(a) Pokaż, że element najlepszej aproksymacji jednostajnej, czyli w normie $\|\cdot\|_\infty$, w P_n na $[a, b]$ dla dowolnej funkcji ciągłej f interpoluje tę funkcję w $n + 1$ punktach na $[a, b]$.

(b) Czy prawdą jest, że dla danej funkcji f ciągłej na $[a, b]$ zawsze istnieje ciąg węzłów $\{x_k^n\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ taki, że ciąg wielomianów stopni nie większych od n: $L_n f$ interpolujących tę funkcję w tych węzłach (tzn. $L_n f(x_k^n) = f(x_k^n)$) zbiega jednostajnie do tej funkcji? Uzasadnij odpowiedź.