

Interpolacja wielomianowa

Zadanie 1 Dla funkcji f wielomianem interpolacyjny Lagrange'a w węzłach $(-1, 0, 1, 2, 3, 4)$ ma w bazie Newtona dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3)$ następujące współczynniki $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$. Znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a w tych samych węzłach i tej samej bazie dla funkcji:

$$g(x) = \sqrt{2} + f(x) - \frac{1}{4!} \prod_{k=-1}^4 (x - k)$$

WSK: Zarówno różnice dzielone jak i operator interpolacji Lagrange'a są liniowe.

Zadanie 2 Dla wielomianów $f_1(x) = x^5 + x^2 - 10$ i $f_2(x) = \frac{1}{4!} \prod_{k=-1}^3 (x - k) - \sqrt{2} + \frac{128}{7}$ znajdź współczynniki tych wielomianów

- w bazie Lagrange'a przestrzeni \mathcal{P}_5 dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3, 4)$
- w bazie Newtona \mathcal{P}_5 dla węzłów $(-1, 0, 1, 2, 3)$

Zadanie 3 Dla funkcji $f(x) = x^7 - 7 * x$ znajdź w wielomian możliwie niskiego stopnia interpolujący tę funkcję w węzłach o krotności dwa $\{-1, 0, 1\}$ za pomocą algorytmu różnic dzielonych, tzn. $w(x_j) = f(x_j)$ i $w'(x_j) = f'(x_j)$ dla x_j jednego z trzech węzłów. Oszacuj błąd w normie maksimum na $[-1, 2]$.

Zadanie 4 Dla funkcji $f(x) = x^4 - 7 * x$ znajdź wielomian p stopnie nie większego od trzech taki, że

$$\|f - p\|_{\infty, [-1, 3]} = \inf_{s \in P_3} \|f - s\|_{\infty, [-1, 3]}$$

czy jest on wyznaczony jednoznacznie? Podaj ile wynosi $\|f - p\|_{\infty, [-1, 3]}$. Tu P_3 wielomiany stopnia ≤ 3 .

Zadanie 5 (trudne) Pokaż, że dla różnych $n + 1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^n$ prawdziwy jest wzór na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:

$$f[x_0, \dots, x_{n+1}] = \sum_{i=0}^{n+1} \frac{f(x_i)}{\prod_{i \neq j} (x_i - x_j)}$$

Zadanie 6 (trudne) Pokaż że dla dwóch różnych punktów x_0, x_1 i funkcji klasy C^1 prawdziwy jest wzór:

$$f[x_0, x_1] = \int_0^1 f'((1-s)x_0 + sx_1) ds$$

Zadanie 7 (trudne) Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' \mathcal{P}_n a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż oszacowania

- normy operatora interpolacji

$$\|L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left(\sum_{k=0}^N \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f\|_{\infty, [a, b]}.$$

- dla dowolnego $w \in P_n$

$$\|f - L_n f\|_{\infty, [a, b]} \leq \left(1 + \sum_{k=0}^N \|l_k\|_{\infty, [a, b]} \right) \|f - w\|_{\infty, [a, b]}$$

dla P_n przestrzeni wielomianów stopnie nie większego od n .

Zadanie 8 (trudne) Pokaż, że dla różnych $n + 1$ punktów $\{x_k\}_{k=0}^n$ prawdziwy jest wzór całkowy Hermite'a-Genocchiego na różnicę dzieloną dla funkcji f określonej na tych punktach:

$$f[x_0, x_1, \dots, x_n] = \int_{S_n} f^{(n)}(s_0 x_0 + s_1 x_1 + \dots + s_n x_n) ds$$

gdzie S_n sympleks jednostkowy w $n + 1$ wymiarach tzn.

$$S_n = \left\{ u = (s_0, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : s_i \geq 0, \sum_{k=0}^n s_i = 1 \right\}.$$

Wsk: Poprzednie zadanie + indukcja korzystająca z przemienności węzłów w różnicy dzielonej tzn. $f[x_{i_0}, \dots, x_{i_n}] = f[x_1, \dots, x_n]$. Tu (i_0, \dots, i_n) permutacja zbioru $\{0, \dots, n\}$. Jeśli Państwo sami tego nie potraficie udowodnić, to rozwiązanie można znaleźć w książce Kincaid, Cheney - Analiza numeryczna, WNT.

Zadanie 9 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ definiujemy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) & k = 0, \dots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) & k = 0, \dots, N - 1. \end{aligned}$$

- Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?
- Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty, [0, 10]} \leq C h^3.$$