# Seria zadań domowych. Numeryczna algebra liniowa cd

Tzn.: układy równań liniowych cd, uwarunkowanie i normy macierzy cd, LZNK

**Zad 1** Znajdź oszacowania (postaci $O(n^p)$ dla $p = 0, 1, 2, 3$ z możliwie małym $p$ niezależnym od $Q$) współczynnika uwarunkowania dla dowolnej macierzy ortogonalnej $Q$ $n \times n$ (tzn. $Q^{-1} = Q^T$) w normach: drugiej, maximum i pierwszej. (indukowanych)

**Zad 2** Niech $R_1 = (r_{ij})$ macierz górnotrójkątna $n \times n$ taka że $r_{ij} = 1$ $j \geq i$ czyli macierz górnotrójkątna ze wszystkimi elementami na diagonali i nad-diagonalą równymi jeden, a $R_2 = R_1 - 2 * I$ też górnotrójkątna ale z jedynkami nad-diagonalą ale minus jeden na diagonali. Policz współczynnik uwarunkowania $R_k$ w normie pierwszej. Czy zależy od $n$? A jeśli tak to jak?

**Zad 3** W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy $A$ otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dla $H_1$ macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 1)^T$.

(a) Wyznacz wektor Householdera dla macierzy Hosueholdera $H_2$ taki, że $H_2 H_1 A = R$ macierz górnotrójkątna.

(b) Policz 3-cią kolumnę macierzy $A$.

(c) Policz macierz $R$.

(d) Wyznacz drugą kolumnę macierzy $A^{-1}$ korzystając z otrzymanego rozkładu $QR$ macierzy $A$ .

**Zad 4** W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy $A$ otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

dla $H_1$ macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 0, 1)^T$.

(a) określ czy $A$ jest kolumnami regularna

(b) Wykonaj kolejny krok metody Householdera tzn. policz macierz $R$ prostokątna górnotrójkątna z głównym minorem nieosobliwym i wyznacz wektor Householdera dla macierzy Householdera $H_2$ takie, że $H_2 H_1 A = R$.

(c) Policz 2-gą kolumnę macierzy $A$.

(d) Rozwiąż LZNK z macierzą $A$ i wektorem.

$$b = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

**Zad 5** Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie $H$ macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że $H$ nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $\vec{b}$ wektor wymiaru $m$ i $a$ skalar.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $A$ nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na $a$, aby $A$ była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{b}$ i $\vec{x}$)

**Zad 6** Dla danych $m$ różnych punktów $(x_k, y_k)$ określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ ($a, b$, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych $m$ punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem $m$ tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla $C_H$ stałej dodatniej i $p$ wykładnika naturalnego.

**Zad 7** Rozpatrzmy układ:

$$Ax = b$$

z

$$A = \begin{pmatrix} D_B & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie $D_B$ macierz blokowo diagonalna wymiaru $k * p \times k * p$ z $k$ identycznymi blokami z macierzą $B$ $p \times p$ symetryczną dodatnio określoną jako bloki diagonali blokowej tzn

$$D_B = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

$C$ macierz kolumnami regularna $k * p \times q$.

Pokaż, że

(a) $A$ nieosobliwa tzn układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego $b$

(b) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $k = p$ a $q \leq p$.

(c) Pokaż że założenie dodatniej określoności $B$ niezbędne by mieć pewność co do nieosobliwości $A$ tzn. np. znajdź przykład dla $k = q = 1$, $p = 2$ takich danych że $B$ symetryczna ale NIE dodatnio określona ale nieosobliwa (np. silnie diagnalnie dominująca) a $A$ osobliwa. (WSK: najprościej wziąć $B$ diagonalną...)