Seria zadań domowych. Numeryczna algebra liniowa cd

Tzn.: układy równań liniowych cd, uwarunkowanie i normy macierzy cd, LZNK, numeryczne zadanie własne.

Zad 1 Znajdź oszacowania (postaci $O(n^p)$ dla $p = 0, 1, 2, 3$ z możliwie małym p niezależnym od Q) współczynnika uwarunkowania dla dowolnej macierzy ortogonalnej Q $n \times n$ (tzn. $Q^{-1} = Q^T$) w normach: drugiej, maximum i pierwszej. (indukowanych)

Zad 2 Niech $R_1 = (r_{ij})$ macierz górnotrójkątna $n \times n$ taka że $r_{ij} = 1$ $j \geq i$ czyli macierz górnotrójkątna ze wszystkimi elementami na diagonali i nad-diagonalą równymi jeden, a $R_2 = R_1 - 2 * I$ też górnotrójkątna ale z jedynkami nad-diagonalą ale minus jeden na diagonali. Policz współczynnik uwarunkowania R_k w normie pierwszej. Czy zależy od n? A jeśli tak to jak?

Zad 3 W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy A otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

dla H_1 macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 1)^T$.

(a) Wyznacz wektor Householdera dla macierzy Hosueholdera H_2 taki, że $H_2H_1A = R$ macierz górnotrójkątna.

(b) Policz 3-cią kolumnę macierzy A.

(c) Policz macierz R.

(d) Wyznacz drugą kolumnę macierzy A^{-1} korzystając z otrzymanego rozkładu QR macierzy A .

Zad 4 W wyniku 1 kroku metody Householdera dla macierzy A otrzymano macierz postaci

$$H_1 * A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

dla H_1 macierzy Householdera z wektorem Householdera $w_1 = (1, 0, 0, 1)^T$.

(a) określ czy A jest kolumnami regularna

(b) Wykonaj kolejny krok metody Householdera tzn. policz macierz R prostokątna górnotrójkątna z głównym minorem nieosobliwym i wyznacz wektor Householdera dla macierzy Householdera H_2 takie, że $H_2 H_1 A = R$.

(c) Policz 2-gą kolumnę macierzy A.

(d) Rozwiąż LZNK z macierzą A i wektorem.

$$b = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix},$$

Zad 5 Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & \vec{b} \\ \vec{b}^T & a \end{pmatrix}$, gdzie H macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że H nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $\vec{b}$ wektor wymiaru m i a skalar.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ay = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $O(n^p)$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na a, aby A była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{b}$ i $\vec{x}$)

Zad 6 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn. jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zad 7 Rozpatrzmy układ:

$$Ax = b$$

z

$$A = \begin{pmatrix} D_B & C \\ C^T & 0 \end{pmatrix}$$

gdzie D_B macierz blokowo diagonalna wymiaru $k * p \times k * p$ z k identycznymi blokami z macierzą B $p \times p$ symetryczną dodatnio określoną jako bloki diagonali blokowej tzn

$$D_B = \begin{pmatrix} B & & & \\ & B & & \\ & & \ddots & \\ & & & B \end{pmatrix}$$

C macierz kolumnami regularna $k * p \times q$.

Pokaż, że

(a) A nieosobliwa tzn układ ma jednoznaczne rozwiązanie dla dowolnego b

(b) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $k = p$ a $q \leq p$.

(c) Pokaż że założenie dodatniej określoności B niezbędne by mieć pewność co do nieosobliwości A tzn. np. znajdź przykład dla $k = q = 1$, $p = 2$ takich danych że B symetryczna ale NIE dodatnio określona ale nieosobliwa (np. silnie diagnalnie dominująca) a A osobliwa. (WSK: najprościej wziąć B diagonalną...)

Zadanie własne

Zad 8 Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & -6 & 7 \end{pmatrix}$$

(a) znajdź wektory i wartości własne (wektory o normie drugiej jeden),

(b) czy ciąg wektorów (o normie drugiej jeden) generowany przez metodę potęgową zbiegnie dla $x_0 = (1, 2, 3, 4)^T / \|(1, 2, 3, 4)^T\|_2$ - ewentualnie czy istnieje podciąg zbieżny w tym ciągu? Jeśli tak, to policz odpowiednie granice.

(c) Określ granice ilorazów Raileigha dla $\{x_k\}_k$ i wyjściowej macierzy A o ile zachodzi zbieżność.

Zad 9 Dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) znajdź wektory i wartości własne (wektory o normie drugiej jeden),

(b) czy ciąg wektorów (o normie drugiej jeden) generowany przez metodę potęgową zbiegnie dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{10}} * (1, 3)^T$ - ewentualnie czy istnieje podciąg zbieżny w tym ciągu? Jeśli tak, to policz odpowiednie granice.

(c) określ czy ciąg iteracji parzystych x_{2k} (o unormowanych w normie drugiej) dla metody odwrotnej potęgowej z parametrami $a_1 = 0$ i $a_2 = 10$ zbiegnie dla $x_0 = \frac{1}{\sqrt{10}} * (1, 3)^T$. Określ granice ilorazów Raileigha dla $\{x_k\}_k$ i wyjściowej macierzy A o ile zachodzi zbieżność.

Zad 10 (trudne) Wykonaj jeden krok czystej metody QR dla zadania własnego dla macierzy z

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Określ czy ciąg macierzy generowanych czystą metodą QR zbiegnie do macierzy diagonalnej - jeśli tak to określ elementy diagonali tej macierzy (kolejność nieważna).