Seria zadań domowych. Równania nieliniowe

Zadania oznaczone jako trudne nie pojawią się na kartkówce. (choć wcale nie muszą być tak naprawdę trudne...). Wskazówki nie będą podane więc zachęcam do przyniesienia wydruków treści zadań.

Zadanie 1 Dla równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$

(a) pokaż że istnieje rozwiązanie $x^* \in [0, 1000]$

(b) określ czy rozwiązanie jest jednoznaczne na $[0, 1000]$

(c) zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego x_0 z $[0, 1000]$.

(d) oszacuj błąd dla 20-tej iteracji tej metody dla $x_0 = 400$ tzn oszacuj $|x_{20} - x^*|$.

Zadanie 2 Dla równania $\frac{1}{x^2+2} - 10 + 3 * x = 0$ określ czy metoda bisekcji startująca z odcinka $[0, 10]$ będzie zbieżna? Jeśli tak to określ n dla których x_n n-ta iteracja metody bisekcji (środek n-tego odcinka) spełnia $|x_n - x^*| \leq 10^{-1}$.

Zadanie 3 Czy metoda Newtona zastosowana do równania $\frac{1}{x+2} - 200 + 0.5x = 0$ będzie zbieżna lokalnie kwadratowo dla rozwiązania tego równania na $[0, 1000]$?

Czy metoda Newtona zastosowana do tego równania z $y_0 = 400$ będzie zbieżna? Jeśli tak to oszacuj błąd $|y_4 - x^*|$ dla y_k k-tej iteracji metody Newtona z $y_0 = 400$.

Wsk: W 2gim pytaniu pomocny może być wzór na błąd metody Newtona zachodzący przy odpowiednich założeniach $y_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2*f'(y_n)}(y_n - x^*)^2$ z ξ pomiędzy x^* i y_n .

Zadanie 4 Pokaż, że równanie

$$x^* - 0.7 * \sin(x^*) = -23$$

ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna

$$x_n = 0.7 * \sin(x_{n-1}) - 23$$

zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania.

Oszacuj możliwie dokładnie błąd $|x_9 - x^*|$ dla $x_0 = -23$.

Zadanie 5 Dla równania

$$f(x) = 5 - \exp(x^*) = 0.$$

Pokaż, że

- Istnieje dokładnie jedno rozwiązanie x^* tego równania.

- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ metoda Newtona zbiegnie do x^*.
- określ czy zachodzi lokalna zbieżność kwadratowa tzn czy istnieje otoczenie x^* takie, że dla x_0 z tego otoczenia metoda jest zbieżna kwadratowo.
- Zaproponuj implementacje jednego kroku metody Newtona o możliwie niskim koszcie dla tej metody (w pseudokodzie, C/C++ lub octavie).

Zadanie 6 Do rozwiązania przybliżonego dwóch równań:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x+2), \\ g(x) &= (x+2)^5, \end{aligned}$$

których rozwiązaniem jest $x^* = -2$ zastosowano metodę Newtona.

Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 7 Do rozwiązania zadania

$$f(x^*) = 0$$

z $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Można skorzystać z twierdzenia o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Zadanie 8 Dla układu równań

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^4 + y^2 - 1 \\ g(x,y) &= x - 2y \end{aligned}$$

policz pierwszą iterację metody Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$. Czy metoda Newtona jest w przypadku tego układu zbieżna lokalnie kwadratowo (dla rozwiązania o obu składowych dodatnich)?

Zadanie 9 Rozpatrzmy równanie $f(x^*) = 0$ dla f gładkiej tzn. w $C^\infty(\mathbb{R})$, ściśle wypukłej, i takiej że $f'(x^*) = 0$. Zakładamy że możemy policzyć wartość i pochodną funkcji w dowolnym punkcie. Określ która z metod iteracyjnych jest sens użyć do rozwiązania tego równania:

- metodę Newtona
- metodę bisekcji
- metodę siecznych

Zadanie 10 Do rozwiązania równań

(a) $f = (x - 2.1) * (\sin(3x) + 5x^2)$
(b) $g = x * (x - 2.1)^2$
(c) $h = \sin(x - 2.1)$

zastosowano metodę Newtona otrzymując dla $x_0 = 3$ ciągi zbieżne do $x^* = 2.1$ z następującymi błędami umieszczonymi w tabelce (pierwsza kolumna to numer iteracji) której fragment jest poniżej zamieszczony:

2	0.509	0.36	0.305
3	0.277	0.0164	0.057
4	0.146	$1.48e-06$	0.00208
5	0.0753	0	$3.25e-06$
6	0.0383	0	$7.94e-12$
7	0.0193	0	0

Określ która kolumna odpowiada której funkcji.

Wsk: Warto określić rząd lokalnej zbieżności każdej funkcji do 2.1 na bazie wiedzy z wykładu/ćwiczeń (liniowa, kwadratowa lub kubiczna) i porównać z szybkością zbieżności, która wynika z kolumn tabelki.

Zadanie 11 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x - 0.1 * \sin(1 + x + 3 * y) = 0 \\ g(x, y) &= 10 * y - \frac{1}{(x + y + 10)} = 0 \end{aligned}$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: to zadanie można rozwiązać znając wzór na normę macierzy $\|A\|_\infty := \sup_{x \neq 0} \|Ax\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$. Możecie Państwo przyjąć że znamy powyższy wzór na tę normę.

Zadanie 12 (trudne) Do rozwiązania układu:

$$10 * \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(1 + x - y) \\ \frac{1}{(x+y+10)} \end{pmatrix} = 0$$

zaproponuj metodę iteracji prostych zbieżną dla dowolnego $x_0 \geq 0$ i $y_0 \geq 0$. Czy rozwiązanie dla $x, y > 0$ jest jednoznaczne?

Oszacuj błąd $\|(x_3, y_3)^T - (x^*, y^*)^T\|_\infty = \max(|x_3 - x^*|, |y_3 - y^*|)$ dla iteracji z $x_0 = y_0 = 1$.

Wsk: Równanie można przedstawić w postaci $\vec{x} = B * [f(\vec{x}), g(\vec{x})]^T]$ dla pewnej macierzy B wymiaru 2×2. Możecie Państwo przyjąć że znamy wzór na normę macierzową supremum.

Zadanie 13 Do rozwiązania układu:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2+y^2-5=0 \\ g(x,y) &= (y+2)(x^3-1)=0 \end{aligned}$$

zastosowano metodę Newtona z $(x_0, y_0) = (1, 1)$.

(a) Wykonaj 1 iteracje metody.

(b) Dla odpowiednich przybliżen początkowych można otrzymać ciągi zbieżne do rozwiązań $(1,-2), (1,2), (-1,-2)$. Określ o ile to możliwe wykładniki zbieżności metody Newtona do tych rozwiązań (powołując się na wykład).

Zadanie 14 (trudne) Udowodnij, że metoda przybliżonego wyznaczania $\sqrt{a}$, dla $a > 0$. zadana wzorem:

$$x_{n+1} = \frac{x_n(x_n^2 + 3 * a)}{3x_n^2 + a}$$

zwraca ciąg zbieżny do $\sqrt{a}$. Podaj możliwie szerokie ograniczenia na wybór punktu startowego $x_0 > 0$ dla którego zachodzi zbieżność. Udowodnij, że wykładnik zbieżności jest równy trzy.