Kolokwium 27-04-2012 - 830 - grupa 1

Czas: 1 godzina 15 minut. Nie wolno mieć żadnych swoich materiałów.

1. Funkcja $F : [-100, 100] \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$F(x) := \frac{1}{2} \int_0^x \sin(t)\cos(2t)e^{-t^2} \mathrm{d}t.$$

   Pokaż, że funkcja ta ma jeden punkt stały i że można go znaleźć stosując metodę iteracji prostej dla dowolnego punktu startowego $x_0 \in [-100, 100]$.

2. Uzasadnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

   ma rozkład Choleskiego i znajdź go. Stosując ten rozkład rozwiąż układ równań $Ax = b$ dla $b = [1, 3, 6]^{\mathrm{T}}$.

3. Poszukuje się wielomianu $w(x) = a + bx$ spełniającego warunek

$$\sum_{i=1}^{4} (w(x_i) - y_i)^2 = min$$

   dla danych z tabeli

x_i	-2	1	0	1
y_i	1	2	0	-1

   (a) Sformułuj to zadanie jako LZNK i określ czy w tym przypadku jest to regularne LZNK.

   (b) Rozwiąż te LZNK stosując algorytm Householdera.

   (c) Sprawdź poprawność otrzymanego rozwiązania rozwiązując odpowiedni układ równań normalnych dla LZNK.

Kolokwium 27-04-2012 - 1215 - grupa 2

Czas: 1 godzina 15 minut. Nie wolno mieć żadnych swoich materiałów.

1. Funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$F(x) := 11 + \frac{1}{10} * \arctan(x)$$

   - Pokaż, że funkcja ta ma jeden punkt stały x^*
   - Znajdź wszystkie x_0 dla których można znaleźć ten punkt stały stosując metodę iteracji prostej dla x_0.
   - Znajdź możliwe małe k tak aby zachodziło oszacowanie $|x_k - x^*| \leq 10^{-13}$ dla $x_0 = 11$ i x_k - k-tej iteracji metody.

2. Uzasadnij, że macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

   ma rozkład Choleskiego i znajdź go. Stosując ten rozkład rozwiąż układ równań $Ax = b$ dla $b = [4, 8, -5, 6]^{\mathrm{T}}$.

3. Wyznaczono następujące wartości funkcji f:

$$f(0) = 1, \quad f(\pi/6) = -2, \quad f(\pi/3) = 2, \quad f(\pi/2) = 1.$$

   Znajdź (dowolne) wartości parametrów $a, b, c \in \mathrm{R}$, takie, że dla funkcji $g(x) = a + b\cos^2 x + c\sin^2 x$ suma

$$\sum_{k=0}^{3} |f(k\pi/6) - g(k\pi/6)|^2$$

   jest minimalna. W tym celu sformułuj odpowiednie **regularne** liniowe zadanie najmniejszych kwadratów i rozwiąż je dowolną metodą.

Kolokwium poprawkowe 01-06-2012 - 1215

Czas: 1 godzina 15 minut. Nie wolno mieć żadnych swoich materiałów.

1. Funkcja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana jest wzorem

$$F(x) := x^3 - 9$$

   Niech x^* jej pierwiastek tj. $F(x^*) = 0$. Do znalezienia przybliżenia x^* zastosowano metodę Newtona z $x_0 = 2.5$,

   - Napisz wzór na kolejną iteracje metody Newtona w tym przypadku
   - Czy metoda Newtona jest zbieżna dla tego x_0? Czy jest to zbieżność kwadratowa?
   - Czy możemy pokazać, że $|x_3 - x^*| \leq 2^{-15}$?

2. Czy macierz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   ma rozkład LU? Jeśli tak to znajdź go i zastosuj do rozwiązania układu równań $Ax = b$ dla $b = [5, 4, -6, 3]^{\mathrm{T}}$.

3. Poszukuje się wielomianu $w(x) = ax + bx^2$ spełniającego warunek

$$\sum_{i=1}^{N} (w(x_i) - y_i)^2 = min$$

   dla danych punktów $(x_i, y_i)_{i=1}^{N}$.

   (a) Sformułuj to zadanie jako LZNK i określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to było regularne LZNK.

   (b) Podaj koszt jako funkcję N rozwiązania tego LZNK metodą Householdera.

   (c) Dla danych z tabeli rozwiąż takie LZNK

x_i	-1	2	1	-2
y_i	1	1	1	1

   znajdując **dowolną** metodą jakikolwiek rozkład QR tej macierzy. Sprawdź poprawność otrzymanego rozwiązania rozwiązując odpowiedni układ równań normalnych dla LZNK.

Odpowiedzi należy uzasadnić.

Egzamin z MO I termin - 14 czerwca 2012 godz 15

Zad 1 Oszacuj błąd $\|f - p_N\|_{\infty,[2,3]}$ w zależności od N dla $f(x) = \sin(2x) + x$ i p_N wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a dla f stopnia nie większego niż N opartego o optymalne węzły interpolacji tj. węzły Czebyszewa na $[2, 3]$.

Zad 2 Niech A macierz symetryczna 5×5 o wartościach własnych $0, 1, 2, 3, 4$. Jak za pomocą odwrotnej metody potęgowej obliczyć przybliżenie wektora x należącego do jądra macierzy A i takiego, że $\|x\|_2 = 1$?

Zad 3 Dla danej tabelki

x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$f''(x_k)$
0	0		
1	-1	-2	12
2	11		

znajdź współczynniki wielomianu interpolacyjnego Hermite'a w stopnia nie większego niż cztery w bazie Newtona związanej z węzłami interpolacji przy pomocy algorytmu różnic dzielonych.

Załóżmy, że $|f^{(j)}(x)| \leq 20$ dla $x \in [0, 2]$ i $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Czy wtedy błąd możemy oszacować następująco: $\|w - f\|_{\infty,[0,2]} \leq 20$?

Zad 4 Rozpatrzmy następującą kwadraturę przybliżającą całkę $\int_a^b f\, dt$:

$$Q_N f = f(x_0) * h + T_{N-2,[x_1,x_{N-1}]} f + f(x_N) * h$$

gdzie $h = (b - a)/N$, $x_k = a + k * h$ dla $k = 0, \ldots, N$ i $T_{N-2,[x_1,x_{N-1}]} f$ jest złożoną kwadraturą trapezów przybliżającą całkę $\int_{x_1}^{x_{N-1}} f\, dt$ opartą na punktach $\{x_k\}_{k=1}^{N-1}$.

(a) wypisz wzory na współczynniki tej kwadratury tj. gdy $Q_N f = \sum_{k=0}^{N} A_k f(x_k)$ - podaj wzory na A_k.

(b) określ rząd tej kwadratury

(c) przy założeniu, że $|f^{(j)}(x)| \leq M$ dla $j = 1, 2$ oszacuj błąd $E_N = |\int_a^b f\, dt - Q_N f|$ jako $O(h^p)$ dla p możliwie dużej liczby naturalnej i stałych zależnych tylko od M.

Zad 5 Niech

$$A = D + \alpha * \vec{u} * \vec{u}^T$$

dla $D = diag(d_1, \ldots, d_N)$ macierzy diagonalnej $N \times N$ o dodatnich wartościach d_k na diagonali, $\vec{u} = (u_k)_{k=1}^N$ wektora o wszystkich współczynnikach niezerowych tj. $u_k \neq 0$ i takiego, że $\|u\|_2 = 1$ i $\alpha \neq 0$ parametru.

- Dla jakich wartości parametru α macierz A jest nieosobliwa?
- Jak możliwie niskim kosztem rozwiązać układ równań liniowych:

$$A\vec{x} = \vec{f}?$$

  Podaj ten koszt.
- Załóżmy, że $0 < c_{min} \leq d_k \leq c_{max}$ dla $k = 1, \ldots, N$. Oszacuj współczynnik uwarunkowania macierzy A w normie drugiej w zależności od α, c_{min} i c_{max}.

Wszystkie odpowiedzi należy uzasadnić. Czas 2 godziny.