

Rozwiązywanie układów równań liniowych, LZNK, normy macierzy.

Proszę rozwiązać w formie pisemnej każde zadanie na oddzielnej kartce na **30 kwietnia 2010** - sprawdzone i ocenione mogą być tylko niektóre. (Nie przyjmuję zadań mailem)

Zadanie 1 Mamy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w ostatniej kolumnie i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & d_2 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & d_{n-2} \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wyboru elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n . Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 2 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b , parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^m |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^m |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadanie miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 3 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 1 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k , oblicz indukowaną normę maksimum i normę pierwszą tzn $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$ i wyznacz takie dwa wektory x_1 i x_2 , że $\|A\|_\infty = \|Ax_1\|_\infty$ i $\|A\|_1 = \|Ax_2\|_1$. Czy wektory x_k są wyznaczone w obu przypadkach jednoznacznie?