Seria druga - NAL - układy równań

Na końcu za zadaniami jest krótki dodatek z wiadomościami potrzebnymi do rozwiązania niektórych zadań.

Zadanie 1 Rozpatrzmy macierz kwadratową wymiaru $(m+2)\times(m+2)$ dla $m \geq 2$ zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} C & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie C dana nieosobliwa macierz $m \times m$, której czynniki rozkładu QR mamy dane (tzn znamy ortogonalną Q i górnotrójkątną R takie, że $C = QR$), B macierz $m \times 2$ maksymalnego rzędu.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $A\vec{x} = \vec{f}$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że A nieosobliwa.

(b) Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + O(m^{p-1})$ dla $p = 1, 2, 3, \ldots$ i C_1 stałej.

(c) Czy przy powyższych założeniach A jest nieosobliwa? Jeśli nie to podaj możliwy do sprawdzenia możliwie tanio warunek na C i B, aby A była nieosobliwa.

Zadanie 2 (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i A macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem n. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej C i p naturalnego).

Zadanie 3 Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^k j^{-1}|x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe c, C nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

Zadanie 4 Dla macierzy A wymiaru 10×10 z Zadania 2 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich k, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor x różny od zera, że $\|x\|_\infty\|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor x jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez -1)?

Zadanie 5 Czy istnieje wartość parametru τ dla którego metoda Richardsona będzie zbieżna (dla dowolnego x_0) dla układu równań z macierzą:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Zadanie 6 Dla jakich wartości parametru s nastepująca metoda iteracyjna będzie zbieżna:

$$\begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & s \\ s & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_k + \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix}$$

dla g_1, g_2 ustalonych wartości.

Zadanie 7 Rozpatrzmy macierz symetryczną $A \in \mathbb{R}^{100,100}$ o wartościach własnych $\{1, \ldots, 100\}$ z odpowiednimi wektorami własnymi q_k, tj. $Aq_k = k * q_k$. Chcemy znaleźć rozwiążanie układu równań $Ax^* = b$. Znamy x_0 takie, że $x_0 - x^* = \sum_{k=1}^{15} a_k q_k$ dla a_k współczynników. Określ czy metoda Richardsona będzie zbieżna dla nastepująch wartości parametru τ:

- $\tau = 0.01$
- $\tau = 1$
- $\tau = 0.1$.

W przypadku zbieżności oszacuj błąd $\frac{\|x^* - x_2\|_2}{\|x^* - x_0\|_2}$ dla x_k k tej iteracji metody.

Zadanie 8 Niech $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ macierz symetryczna i nieosobliwa o wartościach własnych należących do przedziału $[-1, 2]$. Do rozwiązania układu równań liniowych $Bx^* = b$ z macierzą $B = I + A * A$ zastosowano metodę iteracyjną Richardsona z parametrem $\tau = 1/8$ i metodę CG. Określ czy obie metody zbiegną do x^*i w przypadku zbieżności oszacuj odpowiedni błąd:

$$\frac{\|x^* - x_9^{Rich}\|_B}{\|x^* - x_0^{Rich}\|_B}, \qquad \frac{\|x^* - x_9^{CG}\|_B}{\|x^* - x_0^{CG}\|_B},$$

gdzie x_9^{Rich} dziewiąta iteracja Richardsona a x_9^{CG} - dziewiąta iteracja CG

Appendix

Wiadomości z tego dodatku są również w skrypcie wykładowcy ale są to informacje niezbędne do rozwiązania niektórych zadań.

Warunkiem koniecznym i dostatecznym zbieżności metody $x_k = Bx_{k-1} + g$ dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}^N$ do punktu stałego: $x^* = Bx^* + g$, (B macierz iteracji taka, że $(I - B)$ nieosobliwa) jest to aby

$$\rho(B) = \max_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda_k| < 1$$

Tu $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : det(A - \lambda I) = 0\} = \{\lambda \in \mathbb{C} : \exists x \in \mathbb{C}^N, x \neq 0 \ i \ Ax = \lambda x\}$ to spektrum (widmo) macierzy A czyli zbiór wartości własnych $A\cdot$ Wektor $x \neq 0$ taki, że $Ax = \lambda x$ nazywamy wektorem własnym dla λ wartości własnej i (λ, x) nazywamy parą własną. Proszę zauważyć, że $p(x) = det(A - x * I)$ jest wielomianem stopnia N, tak więc zawsze istnieje N wartości własnych (wliczając krotności). W przypadku wartości własnych nierzeczywistych są to zawsze pary sprzężone (o ile $A \in \mathbb{R}^N$) tzn. jeśli (λ, x) para własna to $(\overline{\lambda}, \overline{x})$ też para własna (zadanie), kreska oznacza sprzężenie zespolone.

Dla $A = A^T$ wartości własne są rzeczywiste, co więcej istnieje macierz ortogonalna Q (tzn. $Q^TQ = Q^TQ = I$) taka, że $A = Q\Lambda Q^T$ dla $\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_N)$ macierzy diagonalnej z wartościami własnymi na diagonali. Proste zadanie to pokazanie, że wtedy $\rho(A) = \|A\|_2$, stąd też nazwa 2 normy macierzy jako norma spektralna.