Seria czwarta - kwadratury

Zadanie 1 Pokaż że dla dodatniej wagi parzystej ω (tzn. $\omega(-x) = \omega(x)$) wielomian ortogonalny stopnia parzystego w iloczynie skalarnym typu $L^2_\omega(-a,a)$: $(f,g)_{L^2_\omega(-a,a)} := \int_{-a}^{a} \omega f g \, dx$ jest funkcją parzystą.

Zadanie 2 Wiedząc, że dla danej dodatniej wagi ω zachodzi:

$$\int_{-1}^{3} x^k \omega \, dx = \begin{cases} 0 & k \text{ nieparzyste} \\ \frac{1}{k+1} & w.p.p. \end{cases} \qquad k = 0, \ldots, 8$$

- znajdź pierwsze cztery wielomiany ortogonalne T_k $k = 1,2,3,4$ w iloczynie skalarnym $(f,g) := \int_{-1}^{3} \omega f g \, dx$.
- znajdź kwadraturę Gaussa obliczania $\int_{-1}^{3} f\omega \, dx$ rzędu cztery.

WSK: W pierwszym podpunkcie można skorzystać z ortogonalizacji Gramma-Schmidta lub reguły trócziłonowej - por. notatki z wykładu. W drugim podpunkcie należy skorzystać z pierwszego.

Zadanie 3 Znajdź kwadraturę maksymalnego rzędu opartą o dwa węzły w tym jeden równy zero dla obliczania $\int_{-1}^{3} f \, dx$ tzn $Qf = Af(0) + Bf(\theta)$ dla $\theta \in [-1,3]$.

Zadanie 4 Rozpatrzmy kwadraturę $P_{[a,b]} f = (b-a) * f((a+b)/2)$ dla $\int_a^b f \, dt$.

(a) Znajdź jej rząd.

(b) Pokaż oszacowania błędu

$$|\int_a^b f \, dt - P_{[a,b]} f| \le c_j \|f^{(j)}\|_{\infty,[a,b]} (b-a)^{j+1}$$

dla $f \in C^j([a,b])$ dla $j = 1,2$. (Tu c_j stałe niezależne od f ani a,b.) Przypadek $j = 2$ jest trudny.

(c) Konstruujemy kwadraturę złożoną prostokątów dla całki $\int_c^d f(x) \, dx$:

$$P_n f := \sum_{k=1}^{N} P_{[x_{k-1},x_k]} f = h \sum_{k=1}^{N} f(x_k - h/2)$$

dla $h = (d-c)/N$ i $x_k = c + k * h$. Pokaż, że

$$e_N = |\int_c^d f \, dt - P_N f| \le d_j h^j \|f^{(j)}\|_{\infty,[c,d]}$$

dla $j = 1,2$. (Tu d_j stałe niezależne od f ani N czy h.)

(d) Pokaż, że $\lim_{n\to\infty} e_N = 0$ dla f dowolnej ciągłej (pochodna może nie istnieć).

Wsk: Trzeci podpunkt wynika z drugiego.