Seria trzecia - LZNK, zadanie własne, interpolacja, splajny

Zadanie 1 Dla danych m różnych punktów (x_k, y_k) określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ (a, b, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$

Sformułuj zadanie znalezienia parametrów takiej krzywej jako liniowe zadanie najmniejszych kwadratów (LZNK) dla danych m punktów. Określ jakie warunki muszą spełniać punkty aby to zadania miało jednoznaczne rozwiązanie dla $m \geq 0$. Wyznacz koszt rozwiązania tego LZNK zadania przy pomocy algorytmu Householdera względem m tzn jako $C_H m^p + O(m^{p-1})$ dla C_H stałej dodatniej i p wykładnika naturalnego.

Zadanie 2 Niech A macierz $n + 1 \times n$ kolumnami regularna trójdiagonalna tzn. wszystkie elementy takie, że $|i - j| > 1$ są równe zero. Jak rozwiązać LZNK z taką macierzą kosztem rzędu $C_1 n + C_2$ dla C_1, C_2 stałych dodatnich z użyciem rozkładu QR uzyskanym z wykorzystaniem macierzy Householdera.

Zadanie 3 Rozpatrzmy macierz A wymiaru $(n + 1) \times n$ taką że jesli zapisując blokowo mamy:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & \vec{b}_1 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$$

dla A_1 macierzy $n - 1 \times n - 1$ i wektora $\vec{b} = \begin{pmatrix} \vec{b}_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ z b_2 różnym od zera i $\vec{b}_1$ wektorem wymiaru $n - 1$. Znamy macierze: górnotrójkątną nieosobliwą R wymiaru $n \times n$ i Q_1 ortogonalną wymiaru $n \times n$ że

$$A_1 = Q_1 R.$$

Czy macierz A jest kolumnamu regularna? A jeśli tak to jak możliwie tanio znaleźć rozkład QR macierzy A?

Zadanie 4 Dla macierzy $A = [3, -1; -1, 3]$ zastosowano metodę potęgową (z normowaniem przez normę drugą tzn. $\|x_k\|_2 = 1$) z $x_0 = [1; 0]$. Czy otrzymany ciąg lub podciąg wektorów x_k zbiegnie? Jeśli tak to policz odpowiednią granicę. Czy istnieje granica $r_k = x_k^T A x_k / \|x_k\|_2^2$? (notacja octave'a - ; oddziela wiersze)

Zadanie 5 Czy możemy stwierdzić że $\|f - w\|_{\infty,[-1,1]} \leq 0.1$ dla funkcji $f(x) = \sin(x)$ i $w(x)$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej dwa takiego, że $\sin(j) = w(j)$ dla $j = -1, 0, 1$.

Zadanie 6 Oszacuj błąd $e_{k,N} := \|f_k - w_{k,N}\|_{\infty,[0,10]}$ dla $f_1(x) = \sin(x)$, $f_2 = \log(1+x)$ i $w_{k,N}$ wielomianu interpolacyjnego Lagrange'a stopnia co najwyżej N interpolującego funkcję f_k w $N + 1$ węzłach Czebyszewa. Czy w obu przypadkach zachodzi: $e_{k,N} \to 0$ dla $N \to \infty$?

Zadanie 7 Dla A nieosobliwej takiej, że dla ustalonej liczby b macierz $A - b * I$ jest nieosobliwa i spełnia $A - b * I = QZ$ dla Q ortogonalnej, Z nieosobliwej definiujemy macierz

$$C := ZQ + b * I$$

Czy C jest podobna do macierzy A? Tzn czy istnieje taka macierz nieosobliwa W, że $WCW^{-1} = A$? Czy znając Z, Q, b możemy tę macierz wyznaczyć?

Zadanie 8 Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a,b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a,b])$ w tych węzłach. Pokaż , że

$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (\sum_{k=0}^{N} \|l_k\|_{\infty,[a,b]})\|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Zadanie 9 (trudne) Pokaż, że dla $k+1$ różnych punktów różnica dzielona spełnia:

$$f[x_0,\ldots,x_k] = \sum_{j=0}^{k} \frac{f(x_j)}{\Pi_{\substack{i=0\\ i\neq j}}^{k}(x_j - x_i)}$$

Zadanie 10 Niech $(x_k)_{k=0}^n$ będą różnymi węzłami. Znajdź współczynniki wielomianu

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^4 \frac{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x - x_j)}{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^{n}(x_k - x_j)}$$

w bazie potęgowej $(1, x, \ldots, x^n)$ dla $n = 10$.

Zadanie 11 Na odcinku $[0,10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ szukamy funkcję ciągłą $s \in C([a,b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0,\ldots,N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0,\ldots,N-1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\, h^3.$$

Zadanie 12 (trudne) Na odcinku $[a,b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a,b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) naturalny tzn. $s''(a) = s''(b) = 0$ i $f \in C^2([a,b])$ taka, że

$$f(x_k) = 0 \qquad k = 0,\ldots,N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\, dx = 0.$$

Na kartkówce mogą być zadania nr 1-10 ale bez zadań oznaczonych jako trudne. Norma supremum to

$$\|f\|_{\infty,[a,b]} := \sum_{x\in[a,b]} |f(x)|.$$

Być może dodam jakieś zadania z interpolacji czy splajnów ale ich na kartkówce już nie będzie.