Seria pierwsza - równania nieliniowe

Oznaczenie : aew oznacza $a * 10^w$ dla a liczby rzeczywistej z zakresu $[0, 10]$ postaci $d.dddd$ gdzie d to cyfra $0, \ldots, 9$, a w wykladnik czyli liczba całkowita, np $1.234567e5$ oznacza 123456.7 a $0.1234e - 3$ oznacza 0.0001234.

Zadanie 1

- Pokaż, że metoda iteracyjna $x_{k+1} = F(x_k)$ spełniająca $F \in C^p$ na otoczeniu x^*, $F(x^*) = x^*$ i $F^{(j)}(x^*) = 0; j = 1, \ldots, p - 1$ $(p > 1)$jest zbieżna lokalnie i ma rząd zbieżności p. (ten podpunkt jest dość trudny - nie będzie go na kartkówce)
- Określ rząd zbieżności metody Newtona korzystając z tego kryterium.
- Określ rząd zbieżności metody Halleya (wzór trzeba znaleźć np w skrypcie wykładowcy), korzystając z tego kryterium.

Zadanie 2 Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$ dla $k > 0$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq Le_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 3 Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x - 3)$ i $g(x) = (x - 3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Pokaż, że równanie $x^* - 0.4 * \cos(x^*) = 7$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.4 * \cos(x_{n-1}) + 7$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_8 - x^*|$ dla $x_0 = 7$.

Zadanie 5 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Rozwiązania zadań powinny być uzasadnione. Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy jeśli to wyniki z ćwiczeń to należy je precyzyjnie sformułować.