Metody iteracyjne. Interpolacja, funkcje sklejane (splajny)

Proszę rozwiązać w formie pisemnej zadania 1 i 4 - każde na oddzielnej kartce na **ostatnie ćwiczenia tablicowe tzn. poniedziałek 9 stycznia 2012** (Nie przyjmuję zadań mailem)

Zadanie 1 (pisemne, 10pkt) Niech $A = (a_{kl})_{k,l=1}^n$ macierz symetryczna i nieosobliwa o wartościach własnych należących do przedziału $[-1, 2]$. Do rozwiązania układu równań liniowych $Bx^* = b$ z macierzą $B = A * A$ zastosowano metodę iteracyjną Richardsona z parametrem $\tau = 0.25$ i metodę CG. Określ czy obie metody zbiegną do x^*i w przypadku zbieżności oszacuj odpowiedni błąd:

$$\frac{\|x^* - x_9^{Rich}\|_B}{\|x^* - x_0^{Rich}\|_B}, \qquad \frac{\|x^* - x_9^{CG}\|_B}{\|x^* - x_0^{CG}\|_B},$$

gdzie x_9^{Rich} dziewiąta iteracja Richardsona a x_9^{CG} - dziewiąta iteracja CG

Zadanie 2 Na odcinku $[0, 10]$ mamy węzły równo-odległe: $\{x_k\}_{k=0}^N$ z $x_k = k * h$ dla $h = \frac{10}{N}$. Dla danej funkcji $f(x) = \sin(4 * x)$ szukamy funkcję ciągłą $s \in C([a, b])$ taką, że na każdym pod-odcinku (x_k, x_{k+1}) ta funkcja s jest wielomianem stopnia co najwyżej dwa i spełnia warunki interpolacyjne:

$$\begin{aligned} s(x_k) &= f(x_k) \qquad k = 0, \ldots, N \\ s\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) &= f\left(\frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right) \qquad k = 0, \ldots, N-1. \end{aligned}$$

(a) Czy taka funkcja jest wyznaczona jednoznacznie?

(b) Wyznacz możliwie małą stałą $C > 0$ niezależną od h taką, że

$$\|f - s\|_{\infty,[0,10]} \leq C\, h^3.$$

Zadanie 3 Na odcinku $[a, b]$ mamy zadane węzły : $a = x_0 < \ldots < x_N = b$. Niech s splajn kubiczny na tym podziale odcinka (czyli funkcja w $C^2([a, b])$ na pod-odcinkach będąca wielomianem kubicznym) naturalny tzn. $s''(a) = s''(b) = 0$ i $f \in C^2([a, b])$ taka, że

$$f(x_k) = 0 \qquad k = 0, \ldots, N.$$

Pokaż, że

$$\int_a^b f^{(2)} s^{(2)}\, dx = 0.$$

Zadanie 4 (pisemne, 10pkt) Dla danych różnych węzłów $\{x_k\}_{k=0}^n \subset [a, b]$ niech $\{l_k\}_{k=0}^n$ będzie bazą Lagrange' $\mathcal{P}_n$ a dla tych węzłów, i niech $L_n f$ wielomian interpolujący daną funkcję ciągłą $f \in C([a, b])$ w tych węzłach. Pokaż , że

$$\|L_n f\|_{\infty,[a,b]} \leq (\sum_{k=0}^N \|l_k\|_{\infty,[a,b]}) \|f\|_{\infty,[a,b]}.$$

Zadanie 5 Pokaż, że dla $k + 1$ różnych punktów różnica dzielona spełnia:

$$f[x_0, \ldots, x_k] = \sum_{j=0}^k \frac{f(x_j)}{\Pi_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^k (x_j - x_i)}$$

Zadanie 6 Niech $(x_k)_{k=0}^n$ będą różnymi węzłami. Znajdź współczynniki wielomianu

$$\sum_{k=0}^{n} x_k^4 \frac{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n (x - x_j)}{\Pi_{\substack{j=0\\ j\neq k}}^n (x_k - x_j)}$$

w bazie potęgowej $(1, x, \ldots, x^n)$ dla $n = 10$.