## Seria druga - NAL - układy równań i LZNK

**Proszę rozwiązać w formie pisemnej zadania nr 1 i 4** na piąte ćwiczenia tablicowe (proszę oddać osobiście w czasie ćwiczeń - nie przyjmuję zadań wysłanych mailem)

**Zadanie 1** (pisemnie) Rozpatrzmy macierz zapisaną w formie blokowej $A = \begin{pmatrix} H & R \\ R^T & 0 \end{pmatrix}$, gdzie $H$ macierz Householdera $m \times m$ dla danego wektora Householdera $\vec{x} \neq 0$ (zakładamy że $H$ nie jest utworzona - znamy tylko wektor Householdera), $R$ górno-trójkątna $m \times k$ z $k \leq m$ z niezerowymi elementami na głównej przekątnej tzn. $(R)_{kk} \neq 0$.

(a) Zaproponuj algorytm rozwiązania układu równań liniowych $Ax = f$ możliwie niskim kosztem przy założeniu, że $A$ nieosobliwa. Oszacuj ten koszt w terminach $C_1 m^p + C_2 k^q + O(\max(m^{p-1}, k^{q-1}))$ dla $p, q = 1, 2, 3, \ldots$ i $C_1, C_2$ stałych.

(b) Podaj możliwy do sprawdzenia warunek na $\vec{x}$ i $R$, aby $A$ była nieosobliwa (dla zadanych $\vec{x}, R$)

**Zadanie 2** (Układ z macierzą trójdiagonalną cykliczną) Rozpatrzmy układ równań liniowych $Ax = f$ z wektorem prawej strony $f = (f_1, \ldots, f_n)^T$ i $A$ macierzą rzeczywistą $n \times n$, mającą elementy niezerowe tylko w rogach i na 3 głównych diagonalach tzn:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 & d_1 \\ b_1 & a_2 & c_2 & & \vdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ \vdots & & b_{n-3} & a_{n-2} & c_{n-2} & 0 \\ & & & b_{n-2} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ d_2 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

silnie diagonalnie dominującą wierszowo. Opisz w pseudokodzie algorytm rozwiązywania tego układu będący odpowiednią wersją eliminacji Gaussa (rozkładu LU) bez wybory elementu głównego możliwie niskim koszcie względem $n$. Podaj ten koszt (jako $Cn^p + O(n^{p-1})$ dla stałej dodatniej $C$ i $p$ naturalnego).

**Zadanie 3** Znajdź możliwe duże $c > 0$ i możliwie małe $C > 0$, że dla normy wektorowej w $\mathbb{R}^k$: $\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{k} j^{-1} |x_j|^2}$ zachodzi

$$\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^k \qquad c\|\vec{x}\|_2 \leq \|\vec{x}\| \leq C\|\vec{x}\|_2$$

Stałe $c, C$ nazywamy stałymi równoważności między normą drugą a normą $\|\cdot\|$.

**Zadanie 4** (pisemnie) Dla macierzy $A$ wymiaru $10 \times 10$ z Zadania 2 dla $a_k = d_k = -b_k = -c_k = 1$ dla wszystkich odpowiednich $k$, oblicz indukowaną normę maksimum tzn. $\|A\|_\infty$ i wyznacz taki wektor $x$ różny od zera, że $\|x\|_\infty \|A\|_\infty = \|Ax\|_\infty$. Czy wektor $x$ jest wyznaczony jednoznacznie (z dokładnością do przemnożenia przez $-1$)?

**Zadanie 5** Dla danych $m$ różnych punktów $(x_k, y_k)$ określamy krzywą $y - a * x^2 - b = 0$ ($a, b$, parametry krzywej) jako najlepiej pasującą do tych punktów jeśli:

$$\sum_{k=1}^{m} |y_k - a * x_k^2 - b|^2 = \min_{c,d} \sum_{k=1}^{m} |y_k - c * x_k^2 - d|^2$$