Seria pierwsza - równania nieliniowe

Proszę rozwiązać w formie pisemnej zadania nr 1 i 2, pozostałe zadania dla chętnych choć łatwe. Każde zadanie na oddzielnej kartce na **9 listopada 2011** (termin III ćwiczeń tablicowych) - sprawdzone i ocenione mogą być tylko niektóre (jedno lub dwa). Nie przyjmuje zadań mailem ani przed czy po wymienionej dacie.

Zadanie 1 **(pisemnie)** Aby znaleźć pierwiastek trzeciego stopnia z 5 czyli $x^* = 5^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 5 = 0$ z rozwiązaniem $x^* = 5^{1/3}$ zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- Policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.
- Weźmy $x_0 > x^*$ czy wtedy prawdziwe jest oszacowanie $e_{n+1} \leq Le_n$ dla $n \geq 0$ ze stałą $L < 1$?

Zadanie 2 **(pisemnie)**Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = x * \sin(x-3)$ i $g(x) = (x-3)^2 \exp(x)$ których rozwiązaniem jest $x^* = 3$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*)? Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 3 Pokaż, że równanie $x^* - 0.4 * \cos(x^*) = 7$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.4 * \cos(x_{n-1}) + 7$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_8 - x^*|$ dla $x_0 = 7$.

Zadanie 4 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Rozwiązania zadań powinny być uzasadnione. Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy jeśli to wyniki z ćwiczeń to należy je precyzyjnie sformułować.

Szkic rozwiązań

Zadanie 1 Załóżmy $x_0 \neq x^*$. Proste obliczenia pokazują

$$\begin{aligned} e_{n+1} &= x_{n+1} - x^* = e_n \left(1 - \frac{x_n^2 + x^* x_n + (x^*)^2}{3x_n^2}\right) = e_n \left(\frac{x_n^2 - x^* x_n + x_n^2 - (x^*)^2}{3x_n^2}\right) \\ &= e_n \left(\frac{x_n e_n + e_n(x_n + x^*)}{3x_n^2}\right) = e_n^2 \left(\frac{2x_n + x^*}{3x_n^2}\right) \end{aligned}$$

Z tego wzoru od razu widzimy, że $e_{n+1} > 0$ o ile $x_n > 0$ i indukcja dowodzi pierwszego podpunktu. Dalej dla $n > 0$

$$0 < e_{n+1} = e_n \left(\frac{x_n^2 - x^* x_n + x_n^2 - (x^*)^2}{3x_n^2}\right) \leq e_n \frac{1}{3}\left(1 - \frac{x^*}{x_n} - \left(\frac{x^*}{x_n}\right)^2\right) \leq e_n \frac{1}{3}$$

tu wykorzystaliśmy fakt dodatniości e_n i e_{n+1}. Zatem otrzymaliśmy że $L = 1/3$ w ostatnim podpunkcie a to dowodzi też zbieżności metody. Z kolei ze zbieżności i pierwszego wzoru na błąd otrzymujemy, że $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ zbiega do $1/x^*$.

Zadanie 2 Funkcje są gładkie wystarczy więc policzyć pochodne w $x^* = 3$, dla pierwszej funkcji pochodna jest w $x^* = 3$ różna od zera a dla drugiej równa zero ale druga pochodna jest już niezerowa. Zatem z twierdzenia z wykładu dla f metoda zbiega lokalnie kwadratowo, a dla g na podstawie zadania z ćwiczeń liniowo (z asymptotycznym wykładnikiem 1/2 tzn. metoda zbiega dla dostatecznie dobrego x_0 i $\lim_n \frac{e_{n+1}}{e_n} = 0.5$). Oczywiście można to też udowodnić powtarzając albo dowód twierdzenia z wykładu albo rozwiązanie zadania z ćwiczeń.