Seria pierwsza - równania nieliniowe

Proszę rozwiązać w formie pisemnej zadania nr 1 i 2, pozostałe zadania dla chętnych choć łatwe. Każde zadanie na oddzielnej kartce na **5 listopada 2010** (termin III ćwiczeń tablicowych) - sprawdzone i ocenione mogą być tylko niektóre (jedno lub dwa). Nie przyjmuje zadań mailem ani przed czy po wymienionej dacie.

Zadanie 1 Aby znaleźc pierwiastek trzeciego stopnia z 2 czyli $x^* = 2^{1/3}$, dla równania $f(x) = x^3 - 2 = 0$ z rozwiązaniem zastosowano metodę Newtona.

- Pokaż, że dla dowolnego $x_0 > 0$ zachodzi $x_k \geq x^*$.
- udowodnij, że dla dowolnego $x_0 > 0$ metoda zbiegnie do x^*.
- policz granice $\frac{e_{n+1}}{e_n^2}$ (o ile istnieje) dla $e_n = x_n - x^*$.

Zadanie 2 Pokaż, że równanie $x^* - 0.5 * \sin(x^*) = 10$ ma dokładnie jedno rozwiązanie i że następująca metoda iteracyjna $x_n = 0.5 * \sin(x_{n-1}) + 10$ zbiegnie dla dowolnego $x_0 \in \mathbb{R}$ do rozwiązania tego równania. Oszacuj możliwie dobrze błąd $|x_5 - x^*|$ dla $x_0 = 10$.

Zadanie 3 Do rozwiązania przybliżonego równań $f(x) = \sin(x - 2)$ i $g(x) = (x - 2)^4$ których rozwiązaniem jest $x^* = 2$ zastosowano metodę Newtona. Czy w obu przypadkach metoda będzie zbieżna lokalnie (dla x_0 przybliżenia startowego dostatecznie bliskiego x^*). Jeśli tak to określ wykładnik (rząd) zbieżności w obu przypadkach.

Zadanie 4 Do rozwiązania zadania $f(x^*) = 0$ dla $f(x) = \exp(x) - a$ dla ustalonego $a \in (1, 4)$ zastosowano metodę iteracyjną, która w 9-tej iteracji zwróciła $x_9 > 0$ takie że mamy $|f(x_9)| = 1e - 7$. Czy na tej podstawie możemy stwierdzić, że $|x_9 - x^*| \leq 1e - 6$? Uzasadnić.

WSK: Skorzystać z tw. o wartości średniej i tego że $f(x^*) = 0$.

Można powoływać się na wyniki z wykładu czy z ćwiczeń o ile zostały na tych ćwiczeniach udowodnione i wtedy należy te wyniki z ćwiczeń precyzyjnie sformułować.