Projekt zaliczeniowy

Projekt ma zostać wykonany tylko w octave'ie.

Chcemy rozpatrzyć model populacji: drapieżnika i ofiar ale z tzw. potencjalnym nasyceniem drapieżnika, tzn. jeśli ilość ofiar jest dostatecznie duża to szybkość z jaką drapieżnik je pożera stabilizuje się na pewnym poziomie.

Taką sytuacje można wymodelować następująco:

$$\begin{aligned} x_1' &= -a * x_1 + \frac{b * x_2}{c + k * x_2} * x_1 \\ x_2' &= (d - e * x_2) * x_2 - \frac{f * x_2}{c + k * x_2} * x_1, \end{aligned}$$

gdzie a, b, c, d, e, f, k nieujemne stałe, $x_1(t)$ stan populacji drapieżnika, $x_2(t)$ ofiary w czasie t. Stała k ustala poziom ilości ofiar dla którego drapieżnik się nasyci. Gdy k małe drapieżnik potrzebuje dużo ofiar zanim zacznie zachodzić nasycenie, gdy k duże - nasyca się przy małej liczbie ofiar.

My w naszym projekcie przyjmiemy standardowe wartości stałych jako:

$$a = 0.5, \quad b = 1.0, \quad c = 0.3, \quad d = 1.0, \quad e = 1.0, \quad f = 1.0, \quad k = 0.9.$$

Jedyną stałą, którą będziemy zmieniać jest k, pozostałe więc można przyjąć za ustalone a rozwiązanie zadania początkowego z warunkiem $\vec{x}(0) = \vec{s}$ zapisać jako $\vec{x}(t; \vec{s}; k)$, lub $\vec{x}(t; k)$ lub $\vec{x}(t)$ o ile odpowiednie wartości $\vec{s}$ i k są ustalone.

Portret fazowy

- Narysuj krzywe całkowe rozwiązania $\vec{x}(t; \vec{s}) := (x_1, x_2)^T(t; s)$ dla standardowych wartości stałych w modelu i warunku początkowego: $\vec{s}_1 := (0.9, 0.1)^T$ na odcinku $[0, 10]$ i $[0, 200]$. Powtórz to samo dla rozwiązania z $\vec{s}_2 := (0.4, 0.4)^T$.
- Narysuj trajektorie dla $t \in [0, 10]$ dla następujących wartości $\vec{s}$: $(0.9, 0.1)^T, (0.5, 0.5)^T, (0.1, 0.9)^T, (0.3, 0.6)^T, (0.4, 0.4)^T$ w jednym okienku graficznym.
- Powtórz poprzedni punkt ale dla $t \in [0, 200]$. Czy rozwiązania zbliżają się do jakiegoś zbioru?

Zmiany charakteru trajektorii wraz ze zmianą wartości parametru

Ustalmy warunek początkowy $\vec{s} = (0.5, 0.1)^T$ odcinek czasowy na $[0, 200]$.

- Rysuj trajektorie tzn. $(x_1(t), x_2(t))$ w okienku dla rozwiązań ze zmieniającym się parametrem $k = k_j = j * h$ dla $j = 0, \ldots, 40$ i $h = 0.2$, tzn rysuj kolejne trajektorie w nowych oknach co np. 2 sekundy.
- Narysuj wykresy rozwiązań względem k dla $t = 200$ tzn wykresy $(k, x_1(200, k))$ i $(k, x_2(200, k))$ z wykorzystaniem rozwiązań obliczonych w poprzednim punkcie.

- Policz przybliżenie pochodnej względem parametru k tzn. $\partial_k \vec{x}(t)$ dla $k \in [0, 2]$ i $t = 200$. Narysuj wykresy $(k, \partial_k x_j(200))$ $j = 1, 2$ w tym zakresie wartości k i policz maksymalne i minimalne wartości tego przybliżenia pochodnej.

Oczywiście jak mamy rysować wykres czy liczyć maksimum czy minimum - to robimy to na dyskretnej siatce punktów.