# GAL (I INF)

**EGZAMIN** (I termin)
3 lutego 2008

Uwaga: każde zadanie warte było $5$ punktów, niezależnie od stopnia trudności. Należało wybrać 8 zdań - jeśli ktoś oddał 9 zadań to do sumy punktów nie liczyło zadania o największej liczbie punktów.

**Zadanie 1.** Niech $z$ będzie daną niezerową liczbą zespoloną. Dla jakich liczb całkowitych $n$ liczba $(z + \imath\bar{z})^n$ jest rzeczywista? ($\imath = \sqrt{-1}$)

**Zadanie 2.** Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

definiujemy funkcję $\gamma : \mathbf{R}^3 \to [0, +\infty)$ jako

$$\gamma(\vec{x}) = \|A * \vec{x}\|_2 + |x_1 + a * x_2 + 2 * x_3|,$$

gdzie $\vec{x} = [x_1, x_2, x_3]^T$ oraz $a$ jest danym parametrem rzeczywistym. Dla jakich wartości $a$ funkcja $\gamma$ definiuje normę wektorową w $\mathbf{R}^3$?

**Zadanie 3.** W przestrzeni $\mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ rozważamy podzbiór

$$W = \{p \in \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}} : p(1) + p'(0) = 1\}.$$

Wykaż, że $W$ jest warstwą, tzn. $W = W(p_0, \mathcal{Y})$, dla pewnych $p_0 \in \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ oraz podprzestrzeni $\mathcal{Y} \subset \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$. Znajdź $p_0$ i bazę $\mathcal{Y}$.

**Zadanie 4.** Dla $\mathcal{X} = \mathcal{P}^4_{|\mathbf{R}}$ funkcjonał $f \in \mathcal{X}^*$ zdefiniowany jest jako $f(p) = p'(0) + p^{(3)}(1)$, $p \in \mathcal{X}$. Znajdź współczynniki $a_k$, $k = 1, \ldots, 4$, funkcjonału $f$ w bazie sprzężonej do bazy $(1, 1+t, 1-t^2, t^3)$.

**Zadanie 5.** Stosując eliminację Gaussa znajdź czynniki $P, Q, L, R$ rozkładu trójkątno-trójkątnego $P * A * Q^T = L * R$ macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

**Zadanie 6.** Niech $f : \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}} \to \mathcal{P}^3_{|\mathbf{R}}$ będzie przekształceniem liniowym, którego macierz w bazie potęgowej $(1, t, t^2)$ wynosi

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Znajdź macierz tego przekształcenia w bazie Lagrange'a

$$p_i(t) = \prod_{i \neq j = 1}^{3} \frac{t - t_j}{t_i - t_j}, \qquad i = 1, 2, 3,$$

gdzie $(t_1, t_2, t_3) = (-1, 0, 1)$.

**Zadanie 7.** Niech $A$ będzie macierzą kwadratową formatu $n \times n$, $n \geq 2$, współczynnikami której są dokładnie $n + 1$ jedynek, a pozostałe współczynniki są równe zeru. Jakie wartości może przybierać wyznacznik macierzy $A$?

**Zadanie 8.** Niech $a \in \mathbf{R}$ oraz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ a & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zbadaj, dla jakich wartości $a$ forma dwuliniowa $\varphi : \mathbf{R}^4 \times \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}$ dana wzorem

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \vec{x}^T * A * \vec{y}$$

jest dodatnio określona.

**Zadanie 9.** Niech $\mathcal{X} = \mathcal{P}^9_{|\mathbf{R}}$ będzie przestrzenią Euklidesową z iloczynem skalarnym

$$(p, q) = \sum_{i=-10}^{10} p(i)q(i), \quad p, q \in \mathcal{X}.$$

Niech dalej $\mathcal{Y}$ będzie podprzestrzenią $\mathcal{X}$ składającą się z wielomianów nieparzystych $p$, tzn. takich, że $p(-t) = -p(t)\ \forall t \in \mathbf{R}$. Znajdź rzut prostopadły wielomianu

$$p(t) = t^8 - t^7 + 2t^6 + 1$$

na podprzestrzeń $\mathcal{Y}$.

**Szkic rozwiązań zadań z egzaminu I termin:**

(1) Proste rachunki - mamy $z = a + i * b$ ($a, b$ rzeczywiste) stąd $z + i\,\overline{z} = (a + ib) + i(a - ib) = a + b + i(a + b)$ czyli $z + i\,\overline{z} = r * (\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4))$, dla $r = \pm\sqrt{2} * |a + b|$ czyli $(z + i\,\overline{z})^n = (\pm\sqrt{2} * |a + b|)^n * (\cos(n * \pi/4) + i\sin(n * \pi/4)$ rzeczywiste dla $n = 4 * k$ dla $k$ całkowitych czyli $n$ podzielnych przez cztery.

(2) Z trzech warunków na normę - nieoczywiste jest tylko, że jeśli $\gamma(x) = 0$ to $x = 0$; $\gamma(x) = 0$ daje że $A\vec{x} = 0$ ale $A$ ma niezerowe jądro tzn można obliczyć, że $N(A) = span((-1,1,1)^T)$ zatem jeśli $A\vec{x} = 0$ to $x$ w jądrze czyli $x = (c,-c,-c)^T$ dla stałej $c$ ale dodatkowo mamy, że $|c - a*c - 2*c| = 0 = |c||a+1|$ stąd dla $a \neq -1$ mamy $c = 0$ czyli i $\vec{x} = 0$, w przeciwnym razie gdy $a = -1$ dla niezerowego $\vec{x} = (1,-1,-1)^T$ mamy $\gamma(x) = 0$. odpowiedź: $\gamma(\vec{x})$ norma dla $a \neq -1$

(3) Jeśli $W$ wartwa to $Y = \{x - y : x, y \in W\}$ tworzy podprzestrzeń liniową w naszym przypadku tak jest z $Y = \{p : p(1) + p'(0) = 0\}$ czyli np $W = W(1,Y)$ dalej znalezienie bazy $Y$ to zadanie standardowe.

(4) Te współczynniki to $f(1) = 0, f(1+t) = 1, f(1-t*t) = 0, f(t^3) = 6$ co wprost wynika z definicji bazy sprzężonej bo mamy że jeśli $(s_k)_k$ baza sprzężona do bazy $(v_k)_k$ to $s_k(v_j) = 0$ dla $k \neq j$ i $s_k(v_k) = 1$ zatem jesli $f \in V^*$ to $f = \sum_j a_j s_j$ i $f(v_k) = \sum_j a_j s_j(v_k) = a_k$.

(5) Zadanie standardowe (z wieloma możliwymi rozwiązaniami)

(6) W Z6 znajdujemy macierze przejścia z bazy potęgowej do bazy Lagrange'a $V$ i do niej odwrotną i iloczyn $VAV^{-1}$ to to co szukamy. ($A$ dana macierz przekształcenia w bazie potęgowej) Przy czym można uniknąć obliczania macierzy odwrotnej jako że w kolumnach $V$ są wspólczynniki $t^k$ w bazie Lagrange'a czyli po prostu wartości $t^k$ w $-1, 0, 1$ a z kolei w kolumnach $V^{-1}$ współczynniki $l_k$ w bazie potęgowej - ale je od razu mamy z podanego wzoru na $l_k$!

(7) Gdy mamy jakąś kolumnę czy wiersz z samymi zerami to wyznacznik zero - a jeśli nie to w $n-1$ kolumnach mamy po wersorze a w jednej mamy sumę 2 wersorów i tak samo dla wierszy tzn $A = P + E_{ij}$ gdzie $P$ macierz permutacji a $E_{ij}$ macierz która ma na pozycji $i, j$ jedynkę a na pozostałych zera przy czym $(P)_{ij} = 0$, zatem z liniowości wyznacznika względem $j$tej kolumny mamy że $det(A) = det(P) + det(P')$ dla $P'$ macierzy powstałej z $P$ poprzez zamianę $j$ tej kolumny na $i$ty wersor i wyznacznik $P$ to 1 lub $-1$ a wyznacznik $P'$ równa się zero (dlaczego?). Czyli możliwe wartości wyznacznika to $0, 1, -1$

(8) Zastosować kryterium Sylwestera co sprowadza się do obliczenia 4 wyznaczników minorów głównych (aby forma była dodatnio określona mają być dodatnie) co w sumie da że dla $a \neq 1$ jest to forma dodatnio określona.

(9) (trudne lekko podchwytliwe) Można zauważyć że dla wielomianu parzystego $f(x) = f(-x)$ i nieparzystego $q \in Y$ $q(x) = -q(-x)$ mamy $(f, q) = 0$ dla tego iloczynu skalarnego (dla innych tak by nie musi!), stąd z definicji rzutu ortogonalnego $p_Y$ mamy $(p_Y, g) = (p, g) = (t^8 + 2t^6 + 1, g) + (-t^7, g) = (-t^7, g)$ dla dowolnego $g \in Y$, ale $-t^7 \in Y$ zatem spełnia ten warunek czyli $p_Y = -t^7$ jest rzutem ortogonalnym $p$ na $Y$.

Tak wprost licząc macierz Gramma np w bazie $Y$: $(t, t^3, t^5, t^7)$ też teoretycznie dałoby się wyliczyć rozwiązanie ale po bardzo nieprzyjemnych czy wręcz niewykonalnych rachunkach - wystarczy wtedy wyliczyć macierz Gramma: $A = ((t^k, t^l))_{k,l=1,3,5,7}$ i wektor $\vec{f} = ((p,t), (p,t^3), (p,t^5), (p,t^7))^T$ który jest równy minus ostatnia kolumna macierzy Gramma czyli rozwiązaniem układu: $A\vec{x} = \vec{f}$ jest $(0,0,0,-1)^T$ ale ten wektor (zgodnie z wykładem) zawiera współczynniki rzutu ortogonalnego $p$ na $Y$ w tej bazie czyli rzut równy $-t^7$. Oczywiście jest to sposób de facto czysto teoretyczny bo wyliczenie np. $(t^7, t^7) = \sum_{k=-10}^{10} k^{14}$ jest właściwie niewykonalne (przynajmniej na egzaminie).