GAL ZADANIA DOMOWE - Piata seria

Leszek Marcinkowski

Jeśli ktoś znajdzie jakieś błędy w treści, niejasne sformułowania, literówki etc to proszę o kontakt mailowy, z góry dziękuję

1. Znajdź P, Q macierze permutacji i L, R czynniki rozkładu $PAQ^T = L * R$ dla macierzy:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Wyznacz indeksy kolumn macierzy A z poprzedniego zadania takie że te kolumny o tych indeksach tworzą bazę $R(A)$ oraz wyznacz bazę $N(A)$, sprawdź czy układ $A\vec{x} = (1,1,1)^T$ ma rozwiązanie - jeśli tak to je wyznacz (rozwiązanie ogólne).

3. Wykaż, że układ równań $A * \vec{x} = \vec{b}$, gdzie $A \in \mathbb{K}^{m,n}$, jest niesprzeczny wtedy i tylko wtedy gdy równanie $\vec{0}^T * \vec{x} = 1$ nie jest kombinacją liniową równań tego układu tzn istnieje taki wektor $\vec{a}$ że $\vec{a}^T A = \vec{0}$ i $\vec{a}^T \vec{b} = 1$. $(\vec{0} = [0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{K}^n)$

4. Mamy macierz
$$B = \begin{pmatrix} A & 3A \\ 2A & \alpha A \end{pmatrix}$$
gdzie A macierz rzeczywista nieosobliwa $n \times n$. Dla jakich wartości α układ $B\vec{x} = \vec{b}$ jest oznaczony.

5. Pokaż że dla dowolnej macierzy $A \in \mathbb{K}^{m,n}$ istnieją nieosobliwe macierze B, C takie że
$$BAC = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6. Pokaże ze dla macierzy $A, B \in \mathbb{K}^{m,n}$ istnieją nieosobliwe C, D takie że $CAD = B$ wtedy i tylko wtedy gdy $r(A) = r(B)$.

7. V, W przestrzenie liniowe wymiaru n, m odpowiednio. Mamy $f : V \to W$ przekształcenie liniowe dla którego $dim(Im\ f) = k$. Niech A macierz $\mathbb{K}^{m,n}$. Pokaż że A macierz przekształcenia f w pewnych bazach wtedy i tylko wtedy gdy $r(A) = k$.

8. Niech V, W przestrzenie liniowe przy czym W ma bazę $(w_1, \ldots, w_m)$. Pokaż że $F : V \to W$ jest przekształceniem liniowym wtedy i tylko wtedy gdy istnieją $f_k \in V^*$ dla $k = 1, \ldots, m$ takie że $F(x) = \sum_{k=1}^m f_k(x) w_k$ dla $x \in V$.

9. Niech V przestrzeń ciągów rzeczywistych tzn $(x_k)_{k=1}^\infty$ i niech
$$T_1((x_1, x_2, x_3 \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$
Pokaż że $T_1 : V \to V$ jest przekształceniem liniowym Opisz $Im\ T_1$ i $Ker\ T_1$. Czy istnieje przekształcenie lewostronnie odwrotne do T_1 tzn $G : V \to V$ takie że $G \circ T_1 = Id$ tj. $G(T_1(x)) = x$ dla $x \in V$?

10. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{m,n}$. Znajdź warunek konieczny i dostateczny na to aby A, B były macierzami tego samego przekształcenia liniowego $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. (zazwyczaj w innych bazach)

11. Niech $f : P_{\mathbb{R}}^3 \to P_{\mathbb{R}}^2$ zadefiniowane jako $f(w) = w(0) + w(-1) + (2 * w(1) + w(2)) * x$. Znajdź macierz tego przekształcenia liniowego w bazach $(1, x, x^2)$ i $(1, x)$. Znajdź bazy $Ker\ f$ i $Im\ f$. Czy istnieją takie bazy (v_1, v_2, v_3) i (w_1, w_2) aby macierz
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$
była macierzą przekształcenia liniowego f w tych bazach?

12. Niech $f : V \to W$ przekształcenie liniowe ma w bazach $\mathbb{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ i $\mathbb{B} = (w_1, \ldots, w_m)$ macierz p. liniowego $C \in \mathbb{K}^{m,n}$. Zdefiniujmy przekształcenie dualne jako $f^* : W^* \to V^*$ zdefiniowane jako

$$f^*(w^*)(v) = w^*(f(v)) \qquad \forall w^* \in W^* \; \forall v \in V.$$

Pokaż, że f^* poprawnie zdefiniowane przekształcenie liniowe. Znajdź macierz tego przekształcenia w bazach dualnych do baz $\mathbb{B}, \mathbb{A}$ odpowiednio.

13. Powiemy ze $P : V \to V$ jest rzutem o ile P przekształcenie liniowe i zachodzi

$$P \circ P = P$$

Pokaż że

- $(I - P)$ też rzut (I przekształcenie identycznościowe),
- $Ker\ P = Im\ (I - P)$ oraz $V = Im\ P \oplus Ker\ P$,
- przy załoźnie że V n wymiarowa, istnieje baza $(v_1, \ldots, v_n)$ przestrzeni V w której macierz przekształcenia P jest diagonalna z jedynkami i zerami na diagonali.

14. Czy istnieje takie przekształcenie liniowe $F : V \to V$ że macierz tego przekształcenia w dowolnej bazie jest macierzą identyczności I?