GAL ZADANIA DOMOWE - Czwarta seria

Leszek Marcinkowski

Zadania 1 za 10 pkt, zadania 2-4 po 5pkt na kartkach na wtorek **13 stycznia 2008**. Pozostałe dla chętnych.

Jeśli ktoś znajdzie jakieś błędy w treści, niejasne sformułowania, literówki etc to proszę o kontakt mailowy, z góry dziękuję

Zadania pisemne 1-4

1. (10 pktów) Mamy funkcjonały liniowe f_k w $(\mathbb{C}^8)^*$ zadefiniowane jako $f_k(\vec{x}) = \vec{a}_k^T * \vec{x}$ dla
$$\vec{a}_k = i^k \vec{e}_k - i^k \vec{e}_{k+1} \quad k = 1, \ldots, 7, \qquad \vec{a}_8 = i^8 \vec{e}_8,$$
tutaj $\vec{e}_k$ $k$ty wersor.
   - pokaż że $(f_k)_{k=1}^8 = (f_1, \ldots, f_8)$ baza w $(\mathbb{C}^8)^*$
   - znajdź bazę sprzężoną w $\mathbb{C}^8$ tzn takie wektory $(\vec{b}_k)_k$ że $f_k(\vec{b}_k) = 1$ i $f_k(\vec{b}_j) = 0$ dla $j \neq k$.
   - znajdź współczynniki funkcjonału $f(\vec{x}) = x_1$ w bazie $(f_k)_{k=1}^8$.

2. Dla $f_k \in (\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^5)^*$ takich że $f_1(p) = p(-1) + 3p(0) + p(1)$, $f_2(p) = p(2) - p(-2)$ i $f_3(p) = p'(0)$ definiujemy $X = \{p \in \mathcal{P}^5 : f_1(p) = f_2(p) = f_3(p) = 0\}$. Znajdź wymiary przestrzeni X oraz $\mathcal{P}^5/X$ (czyli przestrzeni warstw modulo X).

   (Przypomnienie dla $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ wielomianu stopnia n definiujemy $p'(x) = \sum_{k=1}^n a_k k x^{k-1}$)

3. Dla $\mathbb{V} = (1, x, x^2) \in (\mathcal{P}_{\mathbb{R}}^3)^{1,3}$ mamy że $\mathbb{W} := \mathbb{V} * C$ dla
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,4}$$
   - Znajdź rząd i bazę obrazu C.
   - Znajdź bazę i wymiar $N(C)$ i sprawdź czy układ równań $C\vec{v} = (1\ 0\ -1)^T$ ma rozwiązanie - jeśli tak to je znajdź (wszystkie rozwiązania jakie są).
   - Czy $p(x) = 1 - x^2$ należy do powłoki liniowej układu $\mathbb{W}$ czyli czy jest kombinacją liniową elementów z $\mathbb{W}$, jesli tak to znajdź wspólczynniki tej funkcji w tym układzie.

4. Mamy podprzestrzeń
$$X = \mathrm{Span}(\sin(x), \sin(2x), \sin(4x), \sin(8x))$$
przestrzeni funkcji ciągłych rzeczywistych $C(\mathbb{R})$ oraz cztery funkcjonały $\phi_k \in X^*$ takie, że $\phi_k(f) = f(x_k)$ dla czterech punktów $x_k \in \mathbb{R}$.
   - Czy istnieją takie punkty x_k, $k = 1, 2, 3, 4$ że układ $(\phi_k)_{k=1}^4$ tworzy bazę X^*?
   - Czy prawdą jest że dla dowolnych x_k układ $(\phi_k)_{k=1}^4$ jest bazą X^*?

   Uzasadnij odpowiedzi.

Zadania dla chętnych, zadania trudniejsze są odp. oznaczone, pozostałe każdy powinien być w stanie zrobić

Część z nich albo mogła być czy dopiero będzie na ćwiczeniach ewent. była/będzie zadana do domu.

5. Znajdź wymiar $C(\mathbb{R})/\mathcal{P}^n_{\mathbb{R}}$ dla $C(\mathbb{R})$ przestrzeni funkcji ciągłych rzeczywistych nad $\mathbb{R}$ i $\mathcal{P}^n_{\mathbb{R}}$ przestrzeni wielomianów stopnia $< n$.

6. Znajdź wymiar $\operatorname{Ker} g = \{v \in V : g(v) = 0\}$ i $V/\operatorname{Ker} g$ dla $g \in V^*$ dla V p. liniowej nad ciałem $\mathbb{K}$.

7. (średnio trudne) Znajdź wymiar i bazę $C(\mathbb{R})/Y$ dla $C(\mathbb{R})$ przestrzeni funkcji ciągłych rzeczywistych nad $\mathbb{R}$ i $Y = \{f \in C(\mathbb{R}) : f(0) = f(1) = 0\}$.

8. (średnio trudne) Niech $(f_1, \ldots, f_k)$ układ niezależnych liniowo funkcjonałów w V^* dla p. liniowej V nad $\mathbb{K}$ n wymiarowej. Przy czym $n > k$. Niech $\mathrm{Ker} g = \{v \in V : g(v) = 0\}$ dla $g \in V^*$. Pokaż że dla $f_{k+1} \in V^*$ mamy że $(f_1, \ldots, f_{k+1})$ niezależny liniowo wtedy i tylko wtedy kiedy $\cap_{j=1}^{k+1} \mathrm{Ker} f_j \neq \cap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker} f_j$. Znajdź wymiar $\cap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker} f_j$.

9. Niech f_k $k = 1, \ldots, n$ funkcjonały liniowe w $(\mathbb{K}^n)^*$ pokaż że istnieją wektory $\vec{b}_k$ takie że $f_k(\vec{x}) = \vec{b}_k^T * \vec{x}$ i że $(f_1, \ldots, f_k)$ baza $(\mathbb{K}^n)^*$ wtedy i tylko wtedy gdy macierz $B = (\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_n)$ nieosobliwa. Jeśli B nieosobliwa to czy któraś z macierzy B, B^{-1}, B^T, B^{-T} zawiera jako kolumny wektory bazy sprzężonej do $(f_k)_k$ w $\mathbb{K}^n$?