GAL 2008/09. Zadania domowe seria 3

Leszek Marcinkowski

24 listopada 2008

Zadania 1-4 w formie pisemnej na **wtorek 16 grudnia 2008**, przy czym zad 1 za 10punktów a zad 2-4 po 5punktów. Pozostałe niepunktowane ale radziłbym spróbować je zrobić przed kolokwium. Trudniesze odpowiednio oznaczyłem.

Jeśli ktoś znajdzie jakieś błędy w treści, niejasne sformułowania, literówki etc to proszę o kontakt mailowy, z góry dziękuję

Zadania pisemne 1-4

1. (za 10p) Mamy przestrzeń ciągów rzeczywistych z działaniami:

$$\lambda(a_k)_{k=1}^{\infty} = (\lambda a_k)_{k=1}^{\infty} \qquad (a_k)_{k=1}^{\infty} + (b_k)_{k=1}^{\infty} = (a_k + b_k)_{k=1}^{\infty}$$

dla $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Pokaż że zbiór ciągów spełniających

$$a_{k+2} + 2a_{k+1} + \alpha a_k = 0 \quad \forall k \geq 1$$

dla danej liczby rzeczywistej α tworzy podprzestrzeń liniową rzeczywistą tej przestrzeni. Znajdź wymiar tej podprzestrzeni.

- Znajdź warunek na α aby ta podprzestrzeń zawierała bazę złożoną z ciągów geometrycznych takich że pierwszy wyraz jest równy jeden tzn bazę ciągów postaci $(1, \xi, \xi^2, \ldots)$ dla pewnego $\xi \in \mathbb{R}$.

2. Znajdź wartości parametru a aby układ wektorów

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 1+a \end{pmatrix}$$

był niezależny liniowe w $\mathbb{R}^3$.

3. Mamy zbiory macierzy rzeczywistych:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \sum_{j=1}^{n} j * a_{ij} = 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\} \\ V_2 &= \{A \in \mathbb{R}^{n,n} : \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0 \quad \forall j = 1, \ldots, n\}. \end{aligned}$$

Znajdź wymiary tych podprzestrzeni $\mathbb{R}^{n,n}$. Czy zachodzi $\mathbb{R}^{n,n} = V_1 \oplus V_2$ lub $\mathbb{R}^{n,n} = V_1 + V_2$?

4. Mamy podprzestrzenie przestrzeni funkcji rzeczywistych ciągłych takie że

$$V_N = \{w(x)e^x : w \text{ wielomian stopnia } \leq N\}$$
$$V_{N,0} = \{p \in V_N : p(1) = p(-1) = 0\} \subset V_N$$

Znajdź wymiary obu podprzestrzeni liniowych oraz taką podprzestrzeń $W \subset V_N$ że $V_N = W \oplus V_{N,0}$.

Zadania dla chętnych, zadania trudniejsze są odp. oznaczone, pozostałe każdy powinien być w stanie zrobić

Część z nich albo mogła być czy dopiero będzie na ćwiczeniach ewent. była/będzie zadana do domu na ćwiczeniach.

5. Mamy ustalone $n+1$ różnych punktów w ciele $\mathbb{K}$: x_k $k = 0, \ldots, n$. Niech p_k wielomian stopnie nie większego od n taki że $p_k(x_l) = 0$ dla $k \neq l$ i $p_l(x_l) = 1$.
   - znajdź faktoryzację l_k nad $\mathbb{K}$ i w ten sposób wzór na $l_k(x)$.
   - pokaż że te wielomiany tworzą baze $P_n(\mathbb{K})$ przestrzeni funkcji wielomianowych stopnia nie większego od n.
   - dla $n = 3$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ i $x_k = k$ dla $k = 0, 1, 2, 3$ znajdź wspólczynniki wielomianu $x^3 + 2x - 7$ w tej bazie .
6. (średnio trudne) Pokaż że układ $(\exp(a_k t))_{k=1}^N$ dla różnych wartości a_k rzeczywistych jest niezależny liniowo w przestrzeni funkcji rzeczywistych nad $\mathbb{R}$.
7. Pokaż że $(1, \cos, \sin)$ tworzą układ niezależny liniowo w przestrzeni funkcji rzeczywistych nad $\mathbb{R}$.
8. (średnio trudne) Mamy dwie podprzestrzenie funkcji rzeczywistych:

$$V_1 = \{f : \exists N \ f(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k \cos(k * x)\}$$

$$V_2 = \{f : \exists M \ f(x) = \sum_{k=1}^{M} a_k \sin(k * x)\}$$

   Pokaż że $V_1 \cap V_2 = \{0\}$.
9. Mamy układ funkcji zespolonych $(f_k)_{k=1}^N$ w przestrzeni funkcji z $\mathbb{C}$ w $\mathbb{C}$ tzn ze standardowymi działaniami $(f + g)(z) = f(z) + g(z)$ i $(\lambda f)(z) = \lambda f(x))$ Pokaż że jeśli istnieje N różnych liczb zespolonych takich że macierz $A = ((f_k)(x_l))_{k,l=1}^N$ jest nieosobliwa. to ten układ niezależny liniowo. (implikacja w druŋa stronę też jest prawdziwa tzn że niezależność liniowa tych funkcji implikuje że istnieją takie punkty ale dowód tego wymaga wiadomości z wykładów które dopiero będą).
10. Dla $V_1 = \mathrm{span}(\exp(2t), \exp(t))$ i $V_2 = \mathrm{span}(1, \cos, \sin)$ w przestrzeni funkcji rzeczywistych nad $\mathbb{R}$, sprawdź czy $V_1 + V_2 = V_1 \oplus V_2$ i znajdź wymiar $V_1 + V_2$.
11. Niech $\mathbb{K}_S^{n,n} = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} : A^T = A\}$ i $\mathbb{K}_{AS}^{n,n} = \{A \in \mathbb{K}^{n,n} : A^T = -A\}$. Znajdź bazy i wymiary tych przestrzeni. Czy prawdą jest, że $\mathbb{K}^{n,n} = \mathbb{K}_S^{n,n} \oplus \mathbb{K}_{AS}^{n,n}$?
12. Niech $P(\mathbb{R})$ przestrzeń wielomianów rzeczywistych a

$$P^p(\mathbb{R}) = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(t) = p(-t) \quad \forall t\}$$

$$P^{np}(\mathbb{R}) = \{p \in P(\mathbb{R}) : p(t) = -p(-t) \quad \forall t\}$$

   oraz $P_N^p(\mathbb{R}) = P^p(\mathbb{R}) \cap P_N(\mathbb{R})$ i $P_N^{np}(\mathbb{R}) = P^{np}(\mathbb{R}) \cap P_N(\mathbb{R})$ dla $P_N(\mathbb{R}) = \{w : w(x) = \sum_{j<N} a_j x^j\}$
   - Znajdź bazy i wymiary $P_N^{np}(\mathbb{R})$ i $P_N^p(\mathbb{R})$ oraz pokaż że $P_N^{np}(\mathbb{R}) \oplus P_N^p(\mathbb{R}) = P_N(\mathbb{R})$
   - Pokaż że $P^{np}(\mathbb{R}) \oplus P^p(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$ oraz $\sum_{N=0}^{\infty} P_N(\mathbb{R}) = P(\mathbb{R})$.

   Przypomnienie: $\sum_{k=1}^{\infty} V_i = \{\sum_{k=1}^{\infty} a_k v_k : a_k \in \mathbb{R}, v_k \in V_k \quad \text{skończona liczba } a_k \neq 0\}$ dla V_k podprzestrzeni liniowych rzeczywistych pewnej przestrzeni liniowej.
13. Niech V_k $k = 1, 2$ podprzestrzenie liniowe $\mathbb{C}^{m,n}$ p. liniowej nad $\mathbb{C}$ takie że $\mathbb{C}^{m,n} = \bigoplus_{k=1}^2 V_k$. I niech $\|X\|_k$ norma w V_k (czyli funkcja określona na V_k w $\mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ spełniająca trzy własności normy). Pokaż że $\|X\| := \|X_1\|_1 + \|X_2\|_2$ dla $X = X_1 + X_2$ jest normą w $\mathbb{C}^{m,n}$.
14. (trudne) Pokaż że $\mathbb{R}$ traktowana jako przestrzeń liniowa nad $\mathbb{Q}$ z działaniami arytmetycznymi jest p. liniową i że wymiar tej przestrzeni jest nieskończony.