GAL 2008/09. Zadania domowe seria 3

Leszek Marcinkowski

24 listopada 2008

Zadania 1-5 na **wtorek 25 listopada 2008**. Pozostałe niepunktowane ale radziłbym spróbować je zrobić przed kolokwium. Trudniesze odpowiednio oznaczyłem.

Jeśli ktoś znajdzie jakieś błędy w treści, niejasne sformułowania, literówki etc to proszę o kontakt mailowy, z góry dziękuję

Zadania pisemne 1-5

1. Mamy macierz rzeczywistą $2n \times 2n$ w postaci blokowej
$$A = \begin{pmatrix} I & B \\ 0 & I \end{pmatrix}$$
dla danej macierzy B formatu $n \times n$ takiej że znamy $\|B\|_1$ i $\|B^T\|_1$. Policz A^{2008} oraz $A^{-2008} := (A^{-1})^{2008}$ oraz $\|A\|_\infty$ i $\|A\|_1$.

2. Dla macierzy rzeczywistej $n \times n$ E takiej że $(E)_{ij} = 1$ dla $j = i+1$, oraz $(E)_{n1} = 1$, i $(E)_{ij} = 0$ w przeciwnym przypadku tzn mamy jedynki na pierwszej naddiagonali i jedynke w dolnym lewym rogu i poza tym zera:
$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
policz E^k dla dowolnego $k > 0$, oraz $\|E\|_2$.

3. Policz normę drugą indukowaną oraz normę Frobeniusa dla macierzy rzeczywistej $n \times n$ postaci:
$$\begin{bmatrix} 0 & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & 0 \end{bmatrix}.$$
Norma Frobeniusa dla $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n \in \mathbb{K}^{n,n}$: $\|A\|_F := \sqrt{\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2}$ przy $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$.

4. Mamy podzbiór macierzy $\mathbb{C}^{n,n}$ $G(c)$ złożony z macierzy takich, że suma elementów w każdym wierszu jest stała równa ustalonej liczbie $c \in \mathbb{C}$. Określ dla jakich wartości c iloczyn macierzy z tego zbioru też należy do tego zbioru tzn dla $A, B \in G(c)$ mamy $A * B \in G(c)$.

5. Policz macierz odwrotną do macierzy górnotrójkątnej $A = (a_{ij})$ takiej, że $a_{ij} = 1$ dla $i \leq j$ (czyli wszystkie elementy równe jeden na diagonali i nad nią) tzn
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1\cdots & 1 & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Zadania dla chętnych, zadania trudniejsze są odp. oznaczone, pozostałe każdy powinien być w stanie zrobić

Część z nich albo mogła być czy dopiero będzie na ćwiczeniach ewent. była/będzie zadana do domu.

6. Dla danej macierzy górnotrójkątnej $U = (u_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ znajdź warunek na to aby macierz U była odwracalna i napisz wzory pozwalające obliczyć

   - elementy wektora $\vec{x}$ będącego rozwiązaniem układu $U\vec{x} = \vec{f}$ dla danego dowolnego wektora $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$
   - elementy macierzy odwrotnej $U^{-1} = B = (b_{ij})$

   (być może wzory rekurencyjne tzn np x_k może zależeć od wcześniej obliczonego/ych x_j dla $j \neq k$).

7. Dla A macierzy górnotrójkątnej z zadania 5 (wszystkie elementy na i nad diagonalą to jedynki) -zaproponuj możliwie tani algorytm rozwiązywania układu równań $A\vec{x} = \vec{f}$ dla dowolnego wektora $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$. Policz ilość potrzebnych operacji arytmetycznych (mnożen, dodawań/odejmowań i dzieleń) w tym algorytmie.

8. Niech A macierz górnotrójkątna z zadania 5 (wszystkie elementy na i nad diagonalą to jedynki)

   - Znajdź macierz odwrotną do macierzy $B = A - 2 * I$ czyli na diagonali -1 nad diagonalą jedynki.
   - Policz normy $\|B\|_\infty$ i $\|B^{-1}|\|_\infty$ i znajdź wektory $\vec{x}$ i $\vec{y}$ takie że $\|\vec{x}\|_\infty = \|\vec{y}\|_\infty = 1$ i $\|B\|_\infty = \|B\vec{x}\|_\infty$ i $\|B^{-1}|\|_\infty = \|B^{-1}\vec{y}\|_\infty$.
   - Treśc jak w poprzednim podpunkcie ale norma ∞ zastąpiona przez normy z indeksem $p = 1$.
   - Zaproponuj możliwie tani algorytm rozwiązywania układu równań $B\vec{x} = \vec{f}$ dla dowolnego wektora $\vec{f} \in \mathbb{R}^n$, policz ilość potrzebnych operacji arytmetycznych.

9. pokaż, że jeśli dla macierzy $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ istnieje wektor $0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ taki że $A\vec{x} = 0$ to macierz jest osobliwa. Czy jeśli ciało $\mathbb{R}$ zastąpimy dowolnym ciałem też to będzie prawda? (implikacja w drugą stronę też jest prawdziwa ale dowód wymaga trochę więcej wiedzy która dopiero będzie na wykładzie)

10. Mamy macierz $\mathbb{Z}_7^{2,2}$ 2×2 nad ciałem $\mathbb{Z}_7$ (działania modulo 7)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$$

    Znajdź macierz odwrotną do niej.

11. Policz macierz odwrotną do macierzy dolnotrójkątnej zespolonej $A = (a_{ij})$ takiej, że $a_{kk} = 1$ i $a_{kj} = i$ dla $k > j$ (czyli wszystkie elementy równe jeden na diagonali i pod nią równe i).

12. *Śladem* macierzy kwadratowej $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,n}$, nazywamy $\mathrm{slad}(A) = \sum_{j=1}^n a_{j,j}$. Policz, dla dowolnych macierzy $A, B \in K^{m,n}$ wzory na

$$\mathrm{slad}(A * B^T), \qquad \mathrm{slad}(A^T * B).$$

    oraz podaj warunki na A i B dla których zachodzi równość tzn $\mathrm{slad}(A * B^T) = \mathrm{slad}(A^T * B)$. (macierze $A * B^T$ i $A^T * B$ są kwadratowe).

13. (średnio trudne) Niech $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n,n} \subset \mathbb{C}^{n,n}$. Pokaż że

$$\|A\|_{2,\mathbb{R}^n} := \sup_{0 \neq \vec{x} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|A\vec{x}\|_2}{\|\vec{x}\|_2} = \sup_{0 \neq \vec{z} \in \mathbb{C}^n} \frac{\|A\vec{z}\|_2}{\|\vec{z}\|_2} =: \|A\|_{2,\mathbb{C}^n}.$$

    czyli że norma druga indukowana macierzy rzeczywistej jest równa normie drugiej indukowanej tejże macierzy traktowanej jako macierz zespolona.

14. Pokaż że $\|AA^T\|_2 = \|A^TA\|_2 = \|A\|_2^2 = \|A^T\|_2^2$ dla macierzy rzeczywistej $n \times n$.

15. (średnio trudne) Pokaż że dla $A \in \mathbb{C}^{m,n}$

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \min(\sqrt{n}, \sqrt{m})\|A\|_2.$$

16. Pokaż że dla $p = 1, \infty, F$ i macierzy rzeczywistej $n \times n$ mamy

$$\||A|\|_p \leq \|A\|_p$$

WSK: dla tych mamy macierzy mamy wzory (wykład- ćwiczenia-literatura)!

17. (średnio trudne) Czy $\|A\|_{max} = \max_{i,j} |a_{ij}|$ dla macierzy $n \times n$ jest normą indukowaną przez jakąś normę wektorową w $\mathbb{C}^n$? (tzn czy istnieje norma wektorowa $\||\cdot\|$ taka, że

$$\|A\|_{max} = \sup_{0 \neq \vec{z} \in \mathbb{C}^n} \frac{\||A\vec{z}\||}{\||\vec{z}\||}?$$

18. Czy norma Frobeniusa może być indukowana przez jakąs normę wektorową w $\mathbb{C}^n$? (czyli pytanie jakw poprzednim zadaniu ale dla normy Frobeniusa).

19. (trudne) Pokaż że

- (nierównośc Younga) Dla dowolnego $a, b > 0$ i $p, q \geq 1$ zachodzi

$$a * b \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- (dyskretna nierówność Höldera) Dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ mamy

$$|\vec{x}^H \vec{y}| \leq \|\vec{x}\|_p \|\vec{y}\|_q$$

  dla $p, q \geq 1$ z $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dla $p = q = 2$ mamy nierówność Schwarza!

- (nierówność Minkowskiego) Dla $1 \leq p < \infty$ dla dowolnych $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{C}^n$ mamy

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|_p \leq \|\vec{x}\|_p + \|\vec{y}\|_p$$

WSK: kolejny punkt wynika z poprzedniego

20. (średnio trudne) Pokaż że dla $\vec{x}^T = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$ czyli funkcjonału liniowego nad $\mathbb{R}$ mamy

$$\|\vec{x}^T\|_{p*} := \sup_{\vec{y} \neq 0} \frac{\|\vec{x}^T * y\|_p}{\|\vec{y}\|_p} = \|\vec{x}\|_q \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \quad 1 \leq p \leq \infty$$

gdzie norma po lewej stronie jest p-tą normą macierzy indukowaną w $\mathbb{R}^{1,n}$ a po prawej zwykłą q-tą normą wektorową. Wsk: proszę zauważyć że $\|\vec{x}^T * \vec{y}\|_p = |\vec{x}^T * \vec{y}|$ i dla $1 < p < \infty$ skorzystać z nierówności Höldera.

21. Pokaż że $\|A\|_{max} = \max_{i,j} |a_{ij}|$ jest normą w $\mathbb{C}^{n,n}$ i że

$$\|A\|_{max} = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_\infty}{\|\vec{x}\|_1}$$

22. Pokaż że $\|A\|_{sum} = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$ jest normą w $\mathbb{C}^{n,n}$ i że

$$\|A\|_{sum} = \sup_{\vec{x} \neq 0} \frac{\|A\vec{x}\|_1}{\|\vec{x}\|_\infty}$$

Czy istnieje norma w $\mathbb{C}^n$ taka że $\|A\|_{sum}$ jest normą indukowaną?