GAL 2008/09. Zadania domowe seria 1

Leszek Marcinkowski

14 X 2008

Zadania 4-7 w formie pisemnej na wtorek 4 listopada 2008 (zadania oddajemy w czasie ćwiczeń).

Zad 1 było już zadane na 2gie ćwiczenia, a zad 2-3 dla chętnych (niepunktowane).

1. Mamy dwie grupy $(G_k, \circ_k, e_k)$ $k = 1, 2$. Definiujemy zbiór $G = G_1 \times G_2$ z działaniem $(a_1, a_2) \circ (b_1, b_2) = (a_1 \circ_1 b_1, a_2 \circ_2 b_2)$ dla $(a_k, b_k) \in G$ $k = 1, 2$. Pokaż że G z tym działaniem jest grupą.

   Jakie warunki muszą spełniać grupy G_1 i G_2 aby G było grupą przemienną (abelową)?

2. (zadanie dla chętnych) Pokaż że $Q(\sqrt{3}) = \{a + b\sqrt{3} : a, b -$ wymierne$\}$ jest podciałem ciała liczb rzeczywistych tzn $(Q(\sqrt{3}), +, *, 0, 1)$ jest ciałem dla $+, *$ zwykłych działań.

3. (zadanie z $*$ dla chętnych) Znajdź zbiór PJ_N wszystkich liczb zespolonych ξ_k takich że $\xi^N = 1$ dla ustalonego $N > 1$ naturalnego oraz pokaż że PJ_N z mnożeniem zespolonym tworzy grupę przemienną (podgrupę grupy multiplikatywnej ciała C) izomorficzna z grupą Z_N z działaniem dodawanie modulo N Narysuj te liczby na płaszczyźnie zespolonej dla $N = 8$. Częścią zadania jest znalezienie w literaturze co oznacza izomorfizm grup (o ile ktoś nie wie np nie był na ćwiczeniach).

Zadania pisemne na wtorek 4 listopada 2007

4. Policz $(1 - i)^{2008}$.

5. Zaznacz na płaszczyźnie zespolonej zbiory

$$A = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}, \quad B = \{z : |z| < 2 \ i \ \operatorname{Arg} z \in (0, 3\pi/4)\}$$

   obrazy tych zbiorów $f(A), f(B)$ dla funkcji $f(z) = w * z$ dla ustalonej liczby w takiej że $|w| = 3$ a $\operatorname{Arg} w = \pi/6$.

6. Znajdź pierwiastki równania wielomianowego i dokonaj faktoryzacji w dziedzinie zespolonej i rzeczywistej

$$z^3 + z^2 + z - 3 = 0$$

   Wsk: $z = 1$ jest pierwiastkiem.

7. Mamy macierzy E rzeczywistą 6×6 taką że $E_{kl} = 0$ o ile $l \neq k+1$ i $E_{k\,k+1} = 1$ dla $k = 1, \ldots, 5$ czyli

$$E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

w miejscach nie wypisanych mamy pozycje zerowe. Mówimy że taka macierz ma tylko niezerową pierwszą naddiagonale. Policz E^2 i E^{2008}.

$*$ oznaczone będą zadania odrobinę trudniejsze dla chętnych.