Twierdzenie Carlesona o reprezentacji funkcji ciągłych

Patryk Rachwał

szablon prezentacji prof. Strzeleckiego

Problem przedłużania funkcji ciągłych

Problem. *Niech C będzie przestrzenią liniową funkcji ciągłych na zbiorze S i niech E będzie jego domkniętym podzbiorem. Jaki warunek musi spełniać E, aby każda funkcja ciągła na E była obcięciem funkcji z C?*

- (Carleson, 1957) Przestrzeń C to przestrzeń $H^\infty(\mathbb{D})$ funkcji analitycznych na kole $|z| < 1$ i ciągłych na brzegu z normą supremum – jest to ośrodkowa przestrzeń Banacha.
- Rozpatrujemy funkcje ciągłe na podzbiorze E okręgu $|z| = 1$.
- Okazuje się, że każda funkcja ciągła na E jest obcięciem do E pewnej funkcji C, o ile tylko E jest zbiorem miary zero.

Problem przedłużania funkcji ciągłych

Problem. *Co jeśli* E *jest miary dodatniej?*

- Twierdzenie nie zachodzi dla zbiorów miary dodatniej – wystarczy wziąć funkcje $\varphi_1, \varphi_2 : E \to \mathbb{C}$ równe na zbiorze miary dodatniej ale nie wszędzie – wtedy ich przedłużenia to f_1, f_2, do tego $f_1 - f_2 \equiv 0$ na zbiorze miary dodatniej, więc wszędzie, co przeczy $\varphi_1 \neq \varphi_2$.
- Pokażemy nawet w jednym z lematów, że istnieje nietrywialna funkcja znikająca na zbiorze E wtedy i tylko wtedy, gdy jest on miary zero.

Lematy

Lemat pierwszy:

- Jeśli E_1 i E_2 są rozłącznymi domkniętymi podzbiorami okręgu $|z| = 1$ o mierze zero, to istnieje funkcja $f \in H^\infty(\mathbb{D})$:
    - równa 1 na E_1,
    - równa 0 na E_2,
    - $|f(z)| \leqslant 2$ na $\mathbb{D}$.

Lemat drugi:

- Jeśli mamy dwie ośrodkowe przestrzenie Banacha $B = (X, \|\cdot\|)$, $B_1 = (X_1, \|\cdot\|_1)$, $B_1 \subset B$ oraz $\|x\|_1 \geqslant \|x\|$, a do tego istnieje ciąg $(x_n) B_1$, $\|x_n\|_1 \leqslant 1$, taki, że dla każdego funkcjonału $L \in B^*$ zachodzi $\|L\| \leqslant M \sup |L(x_n)|$, to $B = B_1$ i ich normy są równoważne.

Szkic dowodu

- Aby zastosować pierwszy lemat, rozważmy wszystkie podziały E na dwa rozłączne zbiory $E_1 \cup E_2 = E$ i skontruujmy ciąg funkcji opisanych w tym lemacie
- Aby zastosować drugi lemat, niech B będzie przestrzenią funkcji ciągłych na E, a B_1 przestrzenią funkcji z $H^\infty(\mathbb{D})$ obciętych do E.
- Dla dowolnego zbioru borelowskiego $A \subset E$ istnieje podciąg f_{n_k} zbieżny do funkcji równej 1 na A i 0 na $E \setminus A$ poza zbiorem o wariacji zero.
- Przedstawmy funkcjonały ograniczone na B w postaci $L(f) = \int_E f d\mu$, gdzie μ jest miarą zespoloną.
- Z lematu Fatou $|\mu(A)| \leqslant |\lim \int_E f_{n_k} d\mu| \leqslant \sup |\int_E f_{n_k} d\mu| = 1$.
- Zatem całkowita wariacja miary szacuje się przez 2.
- W końcu z lematu drugiego przestrzenie B i B_1 są równe, więc dostajemy tezę

Przykład zastosowania

Twierdzenie (F. i M. Riesz): Niech μ będzie miarą na okręgu $|z| = 1$. Jeśli $\int_{|z|=1} z^n d\mu(z) = 0$ dla $n = 1, 2, \ldots$, to μ jest bezwzględnie ciągła.

Alternatywnie: $\widehat{\mu}_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t)$ jest transformacją Fouriera miary. Jeśli dla $n = -1, -2, \ldots$ mamy $\widehat{\mu}_n = 0$, to μ jest bezwzględnie ciągła.

Dowód:

- Niech E będzie domkniętym podzbiorem $|z| = 1$ miary Lebesgue'a zero i niech $m = \int_E |d\mu| > 0$.
- Niech O będzie otwartym otoczeniem zbioru E takim, że $\int_{O \setminus E} |d\mu| < \varepsilon$.
- Skonstruujmy funkcję $g \in C$ taką, że $|g(z)| = 1$ na E oraz $|g(z)| < \varepsilon$ na $|z| = 1$, $z \notin O$.

Dowód:

- Na mocy twierdzenia Carlesona każda funkcja ciągła φ na E jest obcięciem pewnej funkcji $f \in C$ oraz niech $|f(z)| \leqslant M$.
- Wtedy $\int_{|z|=1} z^n g(z) d\mu = 0$ oraz zachodzi oszacowanie: $m = \sup_{\|\varphi\|=1} \int_E \varphi(z) g(z) d\mu \leqslant M \int_{O \setminus E} |d\mu| + M\varepsilon \int_{|z|=1} |d\mu| \leqslant \frac{1}{2} m$, a zatem otrzymujemy sprzeczność.