Quasi-ciągłość funkcji z przestrzeni Sobolewa

Mariusz Janosz

14 maja 2020

Słaba pochodna

Definicja

Dane są: zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkcja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ oraz wielowskaźnik α. Funkcję $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ nazywamy α-tą słabą pochodną, jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

Słaba pochodna

Definicja

Dane są: zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkcja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ oraz wielowskaźnik α. Funkcję $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ nazywamy α-tą słabą pochodną, jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

Jeżeli u ma słabą pochodną to oznaczamy ją $D^\alpha u$.

Słaba pochodna

Definicja

Dane są: zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkcja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ oraz wielowskaźnik α. Funkcję $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ nazywamy α-tą słabą pochodną, jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

Jeżeli u ma słabą pochodną to oznaczamy ją $D^\alpha u$.

Słaba pochodna jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbioru miary zero.

Słaba pochodna

Definicja

Dane są: zbiór otwarty $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, funkcja $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ oraz wielowskaźnik α. Funkcję $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ nazywamy α-tą słabą pochodną, jeżeli dla każdej funkcji $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega u D^\alpha \varphi \, dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v \varphi \, dx$$

Jeżeli u ma słabą pochodną to oznaczamy ją $D^\alpha u$.

Słaba pochodna jest wyznaczona jednoznacznie z dokładnością do zbioru miary zero.

Dla $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ powyższy wzór zachodzi dla $v = D^\alpha u$. Zatem pochodna jest słabą pochodną.

Przestrzeń Sobolewa

Definicja

Zbiór

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^1_{loc}(\Omega) \colon \forall \alpha \text{ takich, że } |\alpha| \leq k \; \exists D^\alpha u \in L^p(\Omega)\},$$

gdzie pochodne są rozumiane jako słabe pochodne, nazywamy przestrzenią Sobolewa.

Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ zawiera wszystkie funkcje całkowalne w p-tej potędze takie, że wszystkie słabe pochodne do rzędu k istnieją i są całkowalne w p-tej potędze.

Przestrzeń Sobolewa

Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Przestrzeń Sobolewa

Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_\Omega |D^\alpha u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Przestrzeń $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}})$ jest przestrzenią Banacha.

Przestrzeń Sobolewa

Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^{p} \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^{\alpha} u\|^{p}_{L^{p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Przestrzeń $(W^{k,p}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,p}})$ jest przestrzenią Banacha.
- Dla $p = 2$ $(W^{k,2}(\Omega), \|\cdot\|_{W^{k,2}})$ jest przestrzenią Hilberta.

Przestrzeń Sobolewa

Przestrzeń Sobolewa $W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią unormowaną z normą

$$\|u\|_{W^{k,p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} .$$

- Przestrzeń $(W^{k,p}(\Omega), \| \cdot \|_{W^{k,p}})$ jest przestrzenią Banacha.
- Dla $p = 2$ $(W^{k,2}(\Omega), \| \cdot \|_{W^{k,2}})$ jest przestrzenią Hilberta.
- $\langle u_1, u_2 \rangle_{W^{k,2}} = \sum_{|\alpha| \leq k} \langle D^{\alpha} u_1, D^{\alpha} u_2 \rangle_{L^2}$

Funkcje gładkie są gęste w $W^{k,p}(\Omega)$

Twierdzenie Meyersa-Serrina

Dla $1 \leq p < +\infty$ $C^{\infty}(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ jest gęstym podzbiorem $W^{k,p}(\Omega)$.
https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300210/pdf/pnas00180-0073.pdf

Funkcje gładkie są gęste w $W^{k,p}(\Omega)$

Twierdzenie Meyersa-Serrina

Dla $1 \leq p < +\infty$ $C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ jest gęstym podzbiorem $W^{k,p}(\Omega)$.
https://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC300210/pdf/pnas00180-0073.pdf

$W^{k,p}(\Omega)$ jest przestrzenią Banacha, zatem na podstawie twierdzenia Meyersa-Serrina dla $p \in [1, +\infty)$ przestrzeń Sobolewa można alternatywnie zdefiniować jako uzupełnienie przestrzeni

$$\widetilde{C^\infty(\Omega)} = \{\varphi \in C^\infty(\Omega) \colon \|\varphi\|_{W^{k,p}} < +\infty\}$$

z metryką pochodzącą od $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$.

Pojemność

Definicja

Dany jest podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Liczbę $C_p(A) = inf_{u \in S(A)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx$, gdzie $S(A)$ to zbiór funkcji z przestrzeni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $u = 1$ na zbiorze otwartym zawierającym A, nazywamy p-pojemnością.

Pojemność

Definicja

Dany jest podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Liczbę $C_p(A) = inf_{u \in S(A)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx$, gdzie $S(A)$ to zbiór funkcji z przestrzeni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $u = 1$ na zbiorze otwartym zawierającym A, nazywamy p-pojemnością.

Zbiory o zerowej p-pojemności mają zerową miarę.

Pojemność

Definicja

Dany jest podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Liczbę $C_p(A) = inf_{u \in S(A)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx$, gdzie $S(A)$ to zbiór funkcji z przestrzeni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $u = 1$ na zbiorze otwartym zawierającym A, nazywamy p-pojemnością.

Zbiory o zerowej p-pojemności mają zerową miarę.

Z punktu widzenia funkcji z przestrzeni Sobolewa zbiory o zerowej p-pojemności są małe.

Pojemność

Definicja

Dany jest podzbiór $A \subset \mathbb{R}^n$. Liczbę $C_p(A) = inf_{u \in S(A)} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p + |\nabla u|^p \, dx$, gdzie $S(A)$ to zbiór funkcji z przestrzeni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ takich, że $u = 1$ na zbiorze otwartym zawierającym A, nazywamy p-pojemnością.

Zbiory o zerowej p-pojemności mają zerową miarę.

Z punktu widzenia funkcji z przestrzeni Sobolewa zbiory o zerowej p-pojemności są małe.

Pojemność jest subaddytywną, monotoniczną funkcją zbioru.

Definicja

Funkcję $u\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy p-quasi-ciągłą jeżeli dla każdego dodatniego ε istnieje A zbiór otwarty taki, że $C_p(A) < \varepsilon$ oraz $u_{|\Omega\setminus A}$ jest funkcją ciągłą.

Quasi-ciąłość

Definicja

Funkcję $u\colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy p-quasi-ciąłą jeżeli dla każdego dodatniego ε istnieje A zbiór otwarty taki, że $C_p(A) < \varepsilon$ oraz $u_{|\Omega\setminus A}$ jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie

Dla każdej funkcji $u_1 \in W^{1,p}(\Omega)$ istnieje p-quasi-ciągła funkcja $u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ taka, że $u_1 = u_2$ prawie wszędzie.

Quasi-ciąłość

Definicja

Funkcję $u \colon \Omega \mapsto \mathbb{R}$ nazywamy p-quasi-ciąłą jeżeli dla każdego dodatniego ε istnieje A zbiór otwarty taki, że $C_p(A) < \varepsilon$ oraz $u_{|\Omega \setminus A}$ jest funkcją ciągłą.

Twierdzenie

Dla każdej funkcji $u_1 \in W^{1,p}(\Omega)$ istnieje p-quasi-ciągła funkcja $u_2 \in W^{1,p}(\Omega)$ taka, że $u_1 = u_2$ prawie wszędzie.

Zatem każdy element przestrzeni $W^{1,p}(\Omega)$ ma p-quasi-ciągłego reprezentanta.

Szkic dowodu

- Na podstawie twierdzenie Meyersa-Serrina wybieramy ciąg $\varphi_i \in C^\infty(\Omega) \cap W^{1,p}(\Omega)$ zbieżny do u_1 w $W^{1,p}(\Omega)$.
- Jest to ciąg Cauchy'ego więc można wybrać taki podciąg, aby szereg

$$\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} \|\varphi_{i_j} - \varphi_{i_{j+1}}\|_{W^{1,p}}^p$$

  był zbieżny.
- Ustalmy zbiór otwarty o zwartym domknięciu D taki, że $\overline{D} \subset \Omega$ oraz funkcję $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ taką, że $\psi(x) = 1$ dla $x \in D$.
- Łatwo sprawdzić, że $\sum_{j=1}^{\infty} 2^{jp} \|\psi(\varphi_{i_j} - \varphi_{i_{j+1}})\|_{W^{1,p}}^p$ jest zbieżny.

Szkic dowodu

- Definiujemy $E_j = \{x \in D \colon |\varphi_{i_j} - \varphi_{i_{j+1}}| > \frac{1}{2^j}\}$.
- Liczymy $C_p(E_j) \leq 2^{jp} \|\psi(\varphi_{i_j} - \varphi_{i_{j+1}})\|^p_{W^{1,p}}$.
- Niech $E_\varepsilon = \bigcup_{j=j_0}^\infty E_j$ dla j_0 tak dużego by $C_p(E_\varepsilon) < \varepsilon$.
- Sprawdzamy jednostajną zbieżność φ_{i_j} na $D \setminus E_\varepsilon$. Granica jest funkcją ciągłą bo zbiżność jest jednostajna.
- Wybieramy ciąg D_i zbiorów otwartych o zwartym domknięciu takich, że $\overline{D_i} \subset \Omega$ oraz $\bigcup_{i=1}^\infty D_i = \Omega$.
- Dla tak wybranych D_i wybieramy zbiory $F_{\frac{\varepsilon}{2^i}}$ w analogiczny sposób jak dobieraliśmy zbiór E_ε do D.
- Poszukiwanym zbiorem A jest $\bigcup_{i=1}^\infty F_{\frac{\varepsilon}{2^i}}$.