Twierdzenie Riesza o reprezentacji funkcjonału

Mateusz Goślinowski

IV 2020

Niech $\mathfrak{M}$ będzie **algebrą**[1] podzbiorów Ω. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Przestrzenią ograniczonych *miar* $\mathbb{K}$-*addytywnych*, $\mathrm{ba}(\mathfrak{M}; \mathbb{K})$, nazywamy przestrzeń ograniczonych funkcji $\mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ spełniających warunek

$$\mu \in \mathrm{ba}(\mathfrak{M}) \iff \forall_{\omega, \omega' \in \mathfrak{M}} (\omega \cap \omega' = \emptyset) \implies \mu(\omega \cup \omega') = \mu(\omega) + \mu(\omega'). \tag{0.1}$$

[1] Tzn. $\emptyset \in \mathfrak{M}$, oraz $\mathfrak{M}$ jest zamknięty na dopełnienie oraz *skończone* sumy i przecięcia.

Niech $\mathfrak{M}$ będzie **algebrą**[1] podzbiorów Ω. Niech $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ lub $\mathbb{C}$. Przestrzenią ograniczonych *miar* $\mathbb{K}$*-addytywnych*, $\mathrm{ba}(\mathfrak{M};\mathbb{K})$, nazywamy przestrzeń ograniczonych funkcji $\mathfrak{M} \to \mathbb{K}$ spełniających warunek

$$\mu \in \mathrm{ba}(\mathfrak{M}) \iff \bigvee_{\omega,\omega' \in \mathfrak{M}} (\omega \cap \omega' = \emptyset) \implies \mu(\omega \cup \omega') = \mu(\omega) + \mu(\omega'). \tag{0.1}$$

Jeśli **ponadto** $\mathfrak{M}$ jest σ-algebrą, oraz

$$\bigvee_{\substack{\{\omega_n\}_{n\geqslant 1} \\ \{\omega_i\} \text{ rozłączne}}} \mu\left(\bigcup_{n\geqslant 1} \omega_n\right) = \sum_{n\geqslant 1} \mu(\omega_n), \tag{0.2}$$

to mówimy, że μ jest *miarą* $\mathbb{K} - \sigma$*-addytywną*. Przestrzeń takich miar oznaczamy $\mathrm{ca}(\mathfrak{M};\mathbb{K})$.

[1] Tzn. $\emptyset \in \mathfrak{M}$, oraz $\mathfrak{M}$ jest zamknięty na dopełnienie oraz *skończone* sumy i przecięcia.

Miary addytywne - uwagi

Miary $\mathbb{K} - \sigma$-addytywne będziemy nazywali $\mathbb{K}$-miarami (rzeczywistymi / zespolonymi).

Miary $\mathbb{K} - \sigma$-addytywne będziemy nazywali $\mathbb{K}$-miarami (rzeczywistymi / zespolonymi).

Uwaga 1.

1. Ponieważ $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$, w szczególności $\mu(\omega) \neq \infty$ dla każdego $\omega \in \mathfrak{M}$.

Miary $\mathbb{K}-\sigma$-addytywne będziemy nazywali $\mathbb{K}$-miarami (rzeczywistymi / zespolonymi).

Uwaga 1.

1. Ponieważ $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$, w szczególności $\mu(\omega) \neq \infty$ dla każdego $\omega \in \mathfrak{M}$.
2. Warunek (0.2) oznacza oczywiście, że szereg $\sum_{n\geqslant 1} \mu(\omega_n)$ jest zbieżny bezwzględnie.

Miary addytywne - uwagi

Miary $\mathbb{K} - \sigma$-addytywne będziemy nazywali $\mathbb{K}$-miarami (rzeczywistymi / zespolonymi).

Uwaga 1.

1. Ponieważ $\mu : \mathfrak{M} \to \mathbb{K}$, w szczególności $\mu(\omega) \neq \infty$ dla każdego $\omega \in \mathfrak{M}$.
2. Warunek (0.2) oznacza oczywiście, że szereg $\sum_{n \geqslant 1} \mu(\omega_n)$ jest zbieżny bezwzględnie.
3. W świetle powyższych definicji, poznana już miara zespolona *jest* miarą zespoloną, jednak miara Lebesgue'a na $\mathbb{R}$ *nie jest* miarą rzeczywistą – przyjmuje wartości nieskończone.

Całkowanie względem miary addytywnej

Uwaga 2.

Teoria całkowania względem miary addytywnej jest podobna do "tradycyjnej" teorii miary - definiujemy najpierw całkę funkcji prostej, a uzyskany funkcjonał liniowy rozszerzamy przez ciągłość na całą przestrzeń ograniczonych funkcji mierzalnych[a][b] $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$.

Uwaga 2.

Teoria całkowania względem miary addytywnej jest podobna do "tradycyjnej" teorii miary - definiujemy najpierw całkę funkcji prostej, a uzyskany funkcjonał liniowy rozszerzamy przez ciągłość na całą przestrzeń ograniczonych funkcji mierzalnych[a][b] $\mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$. Tak zdefiniowany funkcjonał $\int_\Omega \cdot \, d\mu$ jest (z definicji) funkcjonałem liniowym ciągłym oraz dla każdego $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \mathfrak{M})$,

$$\left| \int_\Omega f \, d\mu \right| \leqslant \|f\|_\infty \cdot \|\mu\|_{\mathrm{var}}.$$

[a] $f : \Omega \to \mathbb{R}$ jest mierzalna względem algebry $\mathfrak{M}$, jeśli $f^{-1}((-\infty, c])) \in \mathfrak{M}$ dla każdego c. Funkcja zespolona jest mierzalna, jeśli mierzalne są jej części rzeczywista i urojona.

[b] Cena, jaką musimy zapłacić w związku z faktem, że miara jest tylko skończenie addytywna jest taka, że nie umiemy całkować funkcji nieograniczonych.

Uwaga

Od tej pory pracujemy jedynie na przestrzeniach zwartych. Niech (K, τ) będzie więc przestrzenią topologiczną zwartą. Przez $\mathcal{B}(K)$ oznaczmy tradycyjnie σ-algebrę zbiorów borelowskich, tj. najmniejszą σ-algebrę zawierającą τ, a $C(K)$ - przestrzeń funkcji ciągłych (a zatem i jednostajnie ciągłych) na K o wartościach w ciele $\mathbb{K}$.

Ku twierdzeniu Riesza

Wiemy już, że dla dowolnego $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ możemy zdefiniować funkcjonał liniowy $C(K) \to \mathbb{K}$ wzorem

$$S_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu. \tag{0.3}$$

Wiemy też, że jest to funkcjonał ciągły.

Ku twierdzeniu Riesza

Wiemy już, że dla dowolnego $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ możemy zdefiniować funkcjonał liniowy $C(K) \to \mathbb{K}$ wzorem

$$S_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu. \tag{0.3}$$

Wiemy też, że jest to funkcjonał ciągły.

Pytanie

Czy każdy $\varphi \in (C(K))^*$ jest takiej postaci?

Wiemy już, że dla dowolnego $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ możemy zdefiniować funkcjonał liniowy $C(K) \to \mathbb{K}$ wzorem

$$S_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu. \tag{0.3}$$

Wiemy też, że jest to funkcjonał ciągły.

Pytanie

Czy każdy $\varphi \in (C(K))^*$ jest takiej postaci?

Okazuje się, że tak.

Wiemy już, że dla dowolnego $\mu \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ możemy zdefiniować funkcjonał liniowy $C(K) \to \mathbb{K}$ wzorem

$$S_\mu(f) := \int_\Omega f \, d\mu. \tag{0.3}$$

Wiemy też, że jest to funkcjonał ciągły.

Pytanie

Czy każdy $\varphi \in (C(K))^*$ jest takiej postaci?

Okazuje się, że tak. Jednak $\mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ jest bardzo dużą klasą miar – odwzorowanie $\mu \mapsto S_\mu$ nie jest różnowartościowe.

Ku twierdzeniu Riesza

Z poprzednich slajdów, $\|S_\mu\| \leqslant \|\mu\|_{\mathrm{var}}$. Okazuje się, że w ogólności nierówność ta może być ostra; co więcej, istnieje przykład (K, μ) takich, że $S_\mu = 0$, ale $\|\mu\|_{\mathrm{var}} > 0$! Na tej przestrzeni odwzorowanie $\mu \mapsto S_\mu$ nie może być więc różnowartościowe, gdyż ma nietrywialne jądro.

Ku twierdzeniu Riesza

Z poprzednich slajdów, $\|S_\mu\| \leqslant \|\mu\|_{\mathrm{var}}$. Okazuje się, że w ogólności nierówność ta może być ostra; co więcej, istnieje przykład (K, μ) takich, że $S_\mu = 0$, ale $\|\mu\|_{\mathrm{var}} > 0$! Na tej przestrzeni odwzorowanie $\mu \mapsto S_\mu$ nie może być więc różnowartościowe, gdyż ma nietrywialne jądro.

Skoro $\mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ jest zbyt dużą klasą miar, być może powinniśmy ograniczyć się do jakiejś mniejszej klasy, powiedzmy $\mathrm{ca}(\mathcal{B}(K))$?

Ku twierdzeniu Riesza

Z poprzednich slajdów, $\|S_\mu\| \leqslant \|\mu\|_{\mathrm{var}}$. Okazuje się, że w ogólności nierówność ta może być ostra; co więcej, istnieje przykład (K, μ) takich, że $S_\mu = 0$, ale $\|\mu\|_{\mathrm{var}} > 0$! Na tej przestrzeni odwzorowanie $\mu \mapsto S_\mu$ nie może być więc różnowartościowe, gdyż ma nietrywialne jądro.

Skoro $\mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ jest zbyt dużą klasą miar, być może powinniśmy ograniczyć się do jakiejś mniejszej klasy, powiedzmy $\mathrm{ca}(\mathcal{B}(K))$?

Uwaga

Interesującym faktem jest, że funkcjonał liniowy $\tilde{S}_\mu$, zdefiniowany tym samym wzorem, ale dla wszystkich $f \in \mathcal{M}_b(\mathcal{B}(K))$, jest już różnowartościową, liniową izometrią na $(\mathcal{M}_b(\mathcal{B}(K)))^*$, co udowodnimy później.

Ku twierdzeniu Riesza

Okazuje się znów, że to wciąż za mało – dla "dziwacznych" zbiorów K funkcjonał S_μ ograniczony do tej przestrzeni nadal nie jest injektywny. Musimy więc ponownie ograniczyć się do jeszcze mniejszej klasy miar.

Ku twierdzeniu Riesza

Okazuje się znów, że to wciąż za mało – dla "dziwacznych" zbiorów K funkcjonał S_μ ograniczony do tej przestrzeni nadal nie jest injektywny. Musimy więc ponownie ograniczyć się do jeszcze mniejszej klasy miar.

Klasa ta jest, jak wkrótce zobaczymy, bardzo naturalna i prosta do zdefiniowania.

$\mathbb{K}$-miarę μ na $\mathcal{B}(K)$ nazywamy *regularną*, jeśli w pewnym sensie zbiory mierzalne możemy przybliżać z zewnątrz zbiorami otwartymi, a z wewnątrz zwartymi; ściśle, dla każdego $A \in \mathcal{B}(K)$,

$\mathbb{K}$-miarę μ na $\mathcal{B}(K)$ nazywamy *regularną*, jeśli w pewnym sensie zbiory mierzalne możemy przybliżać z zewnątrz zbiorami otwartymi, a z wewnątrz zwartymi; ściśle, dla każdego $A \in \mathcal{B}(K)$,

$$\bigforall_{\substack{A \in \mathcal{B}(K) \\ \varepsilon > 0}} \ \bigexists_{\substack{G \text{ - otwarty} \\ F \text{ - zwarty} \\ F \subseteq A \subseteq G}} \ \bigforall_{\substack{\omega \in \mathcal{B}(K) \\ \omega \in G \setminus F}} |\mu(\omega)| < \varepsilon.$$

Przestrzeń miar regularnych na $\mathcal{B}(K)$ oznaczamy jako rca$(\mathcal{B}(K))$

$$\forall_{\substack{A \in \mathcal{B}(K) \\ \varepsilon > 0}} \ \exists_{\substack{G \text{ - otwarty} \\ F \text{ - zwarty} \\ F \subseteq A \subseteq G}} \ \forall_{\substack{\omega \in \mathcal{B}(K) \\ \omega \in G \setminus F}} |\mu(\omega)| < \varepsilon.$$

Uwaga

Jeśli miara μ jest miarą nieujemną, to warunek ten wyraża się często poprzez sumę dwóch warunków

$$\forall_{\substack{A\in\mathcal{B}(K)\\ \varepsilon>0}} \ \exists_{\substack{G \text{ - otwarty}\\ F \text{ - zwarty}\\ F\subseteq A\subseteq G}} \ \forall_{\substack{\omega\in\mathcal{B}(K)\\ \omega\in G\setminus F}} |\mu(\omega)| < \varepsilon.$$

Uwaga

Jeśli miara μ jest miarą nieujemną, to warunek ten wyraża się często poprzez sumę dwóch warunków

- $\mu(A) = \inf\{\mu(G), G \text{ - otwarty}\}$ *(zewnętrzna regularność)*

Zewnętrzna i wewnętrzna regularność

$$\forall_{\substack{A\in\mathcal{B}(K)\\ \varepsilon>0}} \ \exists_{\substack{G \text{ - otwarty}\\ F \text{ - zwarty}\\ F\subseteq A\subseteq G}} \ \forall_{\substack{\omega\in\mathcal{B}(K)\\ \omega\in G\setminus F}} |\mu(\omega)| < \varepsilon.$$

Uwaga

Jeśli miara μ jest miarą nieujemną, to warunek ten wyraża się często poprzez sumę dwóch warunków

- $\mu(A) = \inf\{\mu(G), G \text{ - otwarty}\}$ *(zewnętrzna regularność)*
- $\mu(A) = \sup\{\mu(F), F \text{ - zwarty}\}$ *(wewnętrzna regularność)*

Okazuje się, że miary regularne są naturalne w tym sensie, że zachodzi

Własność

Każda $\mathbb{K}$-miara borelowska na przestrzeni **metrycznej** zwartej jest regularna.

Okazuje się, że miary regularne są naturalne w tym sensie, że zachodzi

Własność

Każda $\mathbb{K}$-miara borelowska na przestrzeni **metrycznej** zwartej jest regularna.

Co więcej, jeśli chcemy całkować tylko funkcje ciągłe, ograniczanie się do rca$(\mathcal{B}(K))$ nie "gubi" żadnych funkcjonałów S_μ, o czym mówi następne twierdzenie.

Regularyzacja miary addytywnej

Twierdzenie 1. *Dla każdej* $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ *istnieje* $\mu \in \mathrm{rca}(\mathcal{B}(K))$ *taka, że* $|\mu|(K) = |\tilde{\mu}|(K)$ *oraz dla każdej funkcji* $f \in C(K)$ *zachodzi równość*

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f\, d\tilde{\mu}.$$

Regularyzacja miary addytywnej

Twierdzenie 1. *Dla każdej* $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ *istnieje* $\mu \in \mathrm{rca}(\mathcal{B}(K))$ *taka, że* $|\mu|(K) = |\tilde{\mu}|(K)$ *oraz dla każdej funkcji* $f \in C(K)$ *zachodzi równość*

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f\, d\tilde{\mu}.$$

Dowód (szkic): Załóżmy, że $\mu \geqslant 0$. Dla dowolnego otwartego $G \subset K$ definiujemy

$$\breve{\mu}(G) := \sup\{\tilde{\mu}(F) : F \subset G, F \text{ zwarty}\}$$

oraz dla dowolnego $A \in 2^K$

$$\mu_{out}(A) := \inf\{\breve{\mu}(G) : A \subset G, G \text{ otwarty}\}$$

Następnie:

Regularyzacja miary addytywnej. Dowód.

Następnie:

- Pokazujemy, że μ_{out} jest miarą zewnętrzną.

Regularyzacja miary addytywnej. Dowód.

Następnie:

- Pokazujemy, że μ_{out} jest miarą zewnętrzną.
- Z tw. Carathéodory'ego konstruujemy miarę μ i pokazujemy, że miara ta mierzy wszystkie zbiory otwarte, więc jest borelowska.

Regularyzacja miary addytywnej. Dowód.

Następnie:

- Pokazujemy, że μ_{out} jest miarą zewnętrzną.
- Z tw. Carathéodory'ego konstruujemy miarę μ i pokazujemy, że miara ta mierzy wszystkie zbiory otwarte, więc jest borelowska.
- Dowodzimy, że μ jest regularna, ma tę samą normę $\|\cdot\|_{\mathrm{var}}$ co $\tilde{\mu}$ oraz $S_{\tilde{\mu}} = S_{\mu}$ na $(C(K))^*$.

Twierdzenie 2. *Niech* Σ *będzie* σ*-algebrą podzbiorów (niepustego) zbioru* Ω*. Wówczas odwzorowanie*

$$ba(\Sigma) \ni \tilde{\mu} \longmapsto \tilde{S}_{\tilde{\mu}} \in (\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^* ,$$

zadane na ograniczonych funkcjach mierzalnych f *wzorem*

$$\tilde{S}_{\tilde{\mu}} f := \int_\Omega f \, d\tilde{\mu}, \tag{0.4}$$

jest liniową izometrią ***na*** $(\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$*. W szczególności, każdy* $\varphi \in (\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$ *jest równy* $\tilde{S}_{\tilde{\mu}}$ *dla pewnej miary addytywnej* $\tilde{\mu}$*.*

Dowód: Weźmy dowolną $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\Sigma)$ i zdefiniujmy $\psi(\tilde{\omega}) := \tilde{S}_{\tilde{\mu}}$. ψ jest liniowe, co więcej wiemy już, że $\|\psi\| \leqslant \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$. Pokażemy, że zachodzi równość, czyli ψ jest izometrią.

Dowód: Weźmy dowolną $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\Sigma)$ i zdefiniujmy $\psi(\tilde{\omega}) := \tilde{S}_{\tilde{\mu}}$. ψ jest liniowe, co więcej wiemy już, że $\|\psi\| \leqslant \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$. Pokażemy, że zachodzi równość, czyli ψ jest izometrią.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z definicji wariacji miary, możemy wybrać skończoną rodzinę rozłącznych zbiorów niezerowej miary $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ taką, że

$$\sum_{i=1}^{n} |\tilde{\mu}(\omega_i)| \geqslant |\tilde{\mu}|(\Omega) - \varepsilon.$$

Dowód: Weźmy dowolną $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\Sigma)$ i zdefiniujmy $\psi(\tilde{\omega}) := \tilde{S}_{\tilde{\mu}}$. ψ jest liniowe, co więcej wiemy już, że $\|\psi\| \leqslant \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$. Pokażemy, że zachodzi równość, czyli ψ jest izometrią.

Weźmy dowolne $\varepsilon > 0$. Z definicji wariacji miary, możemy wybrać skończoną rodzinę rozłącznych zbiorów niezerowej miary $\{\omega_i\}_{i=1}^n$ taką, że

$$\sum_{i=1}^n |\tilde{\mu}(\omega_i)| \geqslant |\tilde{\mu}|(\Omega) - \varepsilon.$$

Zdefiniujmy funkcję f wzorem

$$f(x) := \sum_{i=1}^n \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \mathbb{1}_{\omega_i}(x).$$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \mathbb{1}_{\omega_i}(x).$$

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \mathbb{1}_{\omega_i}(x).$$

Funkcja ta jest funkcją prostą (o normie $\|f\|_\infty = 1$), więc $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma)$, oraz

$$\left|\tilde{S}_{\tilde{\mu}} f\right| = \left|\int_\Omega f \, d\tilde{\mu}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \cdot \tilde{\mu}(\omega_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\mu}(\omega_i)| \geqslant |\tilde{\mu}|(\Omega) - \varepsilon.$$

Przestrzeń $(\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Dowód.

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \mathbb{1}_{\omega_i}(x).$$

Funkcja ta jest funkcją prostą (o normie $\|f\|_\infty = 1$), więc $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma)$, oraz

$$\left|\tilde{S}_{\tilde{\mu}} f\right| = \left|\int_\Omega f \, d\tilde{\mu}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \cdot \tilde{\mu}(\omega_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\mu}(\omega_i)| \geqslant |\tilde{\mu}|(\Omega) - \varepsilon.$$

Z dowolności ε, $\|\tilde{S}_{\tilde{\mu}}\| \geqslant \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$, zatem $\|\psi\| = \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$, co należało pokazać.

$$f(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \mathbb{1}_{\omega_i}(x).$$

Funkcja ta jest funkcją prostą (o normie $\|f\|_\infty = 1$), więc $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma)$, oraz

$$\left|\tilde{S}_{\tilde{\mu}} f\right| = \left|\int_\Omega f \, d\tilde{\mu}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{|\tilde{\mu}(\omega_i)|}{\tilde{\mu}(\omega_i)} \cdot \tilde{\mu}(\omega_i)\right| = \sum_{i=1}^{n} |\tilde{\mu}(\omega_i)| \geqslant |\tilde{\mu}|(\Omega) - \varepsilon.$$

Z dowolności ε, $\|\tilde{S}_{\tilde{\mu}}\| \geqslant \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$, zatem $\|\psi\| = \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$, co należało pokazać.

Pozostaje sprawdzić, że ψ jest surjekcją.

Przestrzeń $(\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Dowód.

Weźmy dowolne $\varphi \in (\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Ponieważ φ ma być zadana przez całkę, naturalnym jest zdefiniowanie

$$\tilde{\mu}(\omega) = \varphi(\mathbb{1}_\omega)$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego ω.

Przestrzeń $(\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Dowód.

Weźmy dowolne $\varphi \in (\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Ponieważ φ ma być zadana przez całkę, naturalnym jest zdefiniowanie

$$\tilde{\mu}(\omega) = \varphi(\mathbb{1}_\omega)$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego ω.

Łatwo sprawdzić, że z liniowości φ, $\tilde{\mu}$ jest addytywną funkcją Σ. Jest również funkcją ograniczoną, gdyż

$$|\tilde{\mu}(\omega)| \leqslant \|\phi\| \cdot \|\mathbb{1}_\omega\|_\infty,$$

a $\|\mathbb{1}_\omega\|_\infty \in \{0, 1\}$. Stąd $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\Sigma)$.

Przestrzeń $(\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Dowód.

Weźmy dowolne $\varphi \in (\mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma))^*$. Ponieważ φ ma być zadana przez całkę, naturalnym jest zdefiniowanie

$$\tilde{\mu}(\omega) = \varphi(\mathbb{1}_\omega)$$

dla dowolnego zbioru mierzalnego ω.

Łatwo sprawdzić, że z liniowości φ, $\tilde{\mu}$ jest addytywną funkcją Σ. Jest również funkcją ograniczoną, gdyż

$$|\tilde{\mu}(\omega)| \leqslant \|\phi\| \cdot \|\mathbb{1}_\omega\|_\infty,$$

a $\|\mathbb{1}_\omega\|_\infty \in \{0, 1\}$. Stąd $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\Sigma)$.

Z liniowości φ i $\tilde{S}_{\tilde{\mu}}$, $\varphi(f) = \tilde{S}_{\tilde{\mu}}(f)$ dla wszystkich funkcji prostych, a zatem z ciągłości φ i $\tilde{S}_{\tilde{\mu}}$ oraz faktu, że funkcje proste są gęste w ograniczonych funkcjach mierzalnych, $\varphi(f) = \tilde{S}_{\tilde{\mu}}(f)$ dla *wszystkich* funkcji $f \in \mathcal{M}_b(\Omega, \Sigma)$. ∎

Twierdzenie 3. (Riesz, 1909; Markow, 1938; Kakutani, 1941) *Niech (K, τ) będzie przestrzenią zwartą. Wówczas, dla każdego $\varphi \in C(K; \mathbb{K})^*$ istnieje **dokładnie jedna** borelowska, regularna $\mathbb{K}$-miara μ taka, że dla każdego $f \in C(K)$ zachodzi równość*

$$\varphi(f) = \int_K f \, d\mu.$$

Co więcej, $\|\varphi\| = \|\mu\|_{\mathrm{var}}$, a odwzorowanie

$$rca(\mathcal{B}(K)) \ni \mu \longmapsto S_\mu \in (C(K))^*$$

jest liniową izometrią na $(C(K))^*$.

Powyższe odwzorowanie jest oczywiście liniowe, wystarczy więc dowieść pierwszej części twierdzenia.

Twierdzenie Riesza. Dowód.

Powyższe odwzorowanie jest oczywiście liniowe, wystarczy więc dowieść pierwszej części twierdzenia.

Po pierwsze zauważmy, że jednoznaczność wyniknie z izometryczności. Weźmy dowolne $\varphi \in (C(K))^*$. Ponieważ $\mathcal{B}(K)$ zawiera wszystkie zbiory otwarte, funkcje ciągłe są mierzalne - $C(K) \subset \mathcal{M}_b(K, \mathcal{B}(K))$. Z tw. Hahna-Banacha istnieje rozszerzenie $\tilde{\varphi} \in (\mathcal{M}_b(K, \mathcal{B}(K)))^*$ na wszystkie funkcje mierzalne, zachowujące normę: $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.

Twierdzenie Riesza. Dowód.

Powyższe odwzorowanie jest oczywiście liniowe, wystarczy więc dowieść pierwszej części twierdzenia.

Po pierwsze zauważmy, że jednoznaczność wyniknie z izometryczności. Weźmy dowolne $\varphi \in (C(K))^*$. Ponieważ $\mathcal{B}(K)$ zawiera wszystkie zbiory otwarte, funkcje ciągłe są mierzalne - $C(K) \subset \mathcal{M}_b(K, \mathcal{B}(K))$. Z tw. Hahna-Banacha istnieje rozszerzenie $\tilde{\varphi} \in (\mathcal{M}_b(K, \mathcal{B}(K)))^*$ na wszystkie funkcje mierzalne, zachowujące normę: $\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|$.
$\mathcal{B}(K)$ jest też σ-algebrą, zatem z poprzedniego twierdzenia istnieje ograniczona miara addytywna $\tilde{\mu} \in \mathrm{ba}(\mathcal{B}(K))$ taka, że dla każdej funkcji mierzalnej, a zatem i dla każdej funkcji ciągłej f zachodzi równość

$$\varphi(f) = \tilde{\varphi}(f) = \int_K f \, d\tilde{\mu}$$

oraz $\|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}} = \|\tilde{\varphi}\|$.

Z pierwszego twierdzenia, istnieje regularna $\mathbb{K}$-miara $\mu \in \mathrm{rca}(\mathcal{B}(K))$ taka, że dla wszystkich funkcji ciągłych,

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f\, d\tilde{\mu} = \varphi(f),$$

oraz $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$.

Z pierwszego twierdzenia, istnieje regularna $\mathbb{K}$-miara $\mu \in \mathrm{rca}(\mathcal{B}(K))$ taka, że dla wszystkich funkcji ciągłych,

$$\int_K f\, d\mu = \int_K f\, d\tilde{\mu} = \varphi(f),$$

oraz $\|\mu\|_{\mathrm{var}} = \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}}$.

To kończy dowód, gdyż

$$\|\mu\|_{\mathrm{var}} = \|\tilde{\mu}\|_{\mathrm{var}} = \|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi\|.$$

$\blacksquare$

- Twierdzenie Riesza pozwala "trudne" pytania o abstrakcyjne funkcjonały liniowe przenieść na grunt bardziej "przyjaznej" teorii miary.

Twierdzenie Riesza. Uwagi.

- Twierdzenie Riesza pozwala "trudne" pytania o abstrakcyjne funkcjonały liniowe przenieść na grunt bardziej "przyjaznej" teorii miary.
- Biorąc np. $K = [0; 1]$ i funkcjonał liniowy ciągły $\mathcal{R}(f)$ - całkę Riemanna, otrzymujemy naturalnie miarę Lebesgue'a.

Twierdzenie Riesza. Uwagi.

- Twierdzenie Riesza pozwala "trudne" pytania o abstrakcyjne funkcjonały liniowe przenieść na grunt bardziej "przyjaznej" teorii miary.
- Biorąc np. $K = [0;1]$ i funkcjonał liniowy ciągły $\mathcal{R}(f)$ - całkę Riemanna, otrzymujemy naturalnie miarę Lebesgue'a.
- Twierdzenie to jest nieodzowne np. w teorii operatorów, gdzie z rachunku funkcji ciągłych możemy otrzymać miarę spektralną.

Twierdzenie Riesza. Uwagi.

- Twierdzenie Riesza pozwala "trudne" pytania o abstrakcyjne funkcjonały liniowe przenieść na grunt bardziej "przyjaznej" teorii miary.
- Biorąc np. $K = [0;1]$ i funkcjonał liniowy ciągły $\mathcal{R}(f)$ - całkę Riemanna, otrzymujemy naturalnie miarę Lebesgue'a.
- Twierdzenie to jest nieodzowne np. w teorii operatorów, gdzie z rachunku funkcji ciągłych możemy otrzymać miarę spektralną.
- Twierdzenie pozostaje prawdziwe w wielu wariantach; możemy np. założyć, że K jest jedynie lokalnie zwartą przestrzenią Hausdorffa i rozpartywać funkcjonały $(C_0(K))^*$.