Istnienie miar niezmienniczczych względem przekształceń odcinka

Artur Szyszko

30.04.2020r

Pojęcia wstępne

- Definicja Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie przestrzenią z miarą i dana będzie funkcja mierzalna $f : X \to X$. O mierze μ określonej na $(X, \mathfrak{M})$ mówi się, że jest niezmiennicza ze względu na f,, jeżeli dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \mathfrak{M}$ zachodzi $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = \mu(A)$.

- Definicja Niech $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ będzie określona jak wyżej. Powiemy, że przekształcenie $f : X \to X$. jest niesingularne (nonsingular) wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego zbioru mierzalnego $A \in \mathfrak{M}$ takiego , że $\mu(A) = 0$ mamy $\mu\left(f^{-1}(A)\right) = 0$.

Funkcje o wahaniach ograniczonych

- Definicja: Niech $f : [a, b] \to \Re$ i niech P będzie podziałem $[a, b]$.Jeżeli istnieje taka liczba dodatnia M, że

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| < M$$

dla wszystkich podziałów P, wtedy mówimy o funkcji f, że ma wahania ograniczone na [a,b].

Uwaga

Jeżeli f jest rosnąca lub spełnia warunek Lipschitza z pewnym K , to ma wahania ograniczone.

Funkcje o wahaniach ograniczonych

- Definicja: Niech $f : [a, b] \to \Re$ będzie funkcją o wahaniach ograniczonych. Liczbę

  $\mathrm{V}_{[a,b]} f = sup_P(\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})|)$

  nazywamy wahaniem funkcji f na [a,b]

- Twierdzenie: Niech $f : [a, b] \to \Re$ ma ciągłą pochodną f' na $[a, b]$.

Wówczas $\mathrm{V}_{[a,b]} f = \int_a^b |f'(x)| d\lambda(x)$

- Przestrzenią funkcji o wahaniu ograniczonym na [a,b] nazywamy $BV([a,b]) = \{f \in L^1([a,b]) \colon inf_{f_1 = f\, a.e} V_{[a,b]} f_1 < +\infty\}$

- Na BV([a,b]) definiujemy normę : Dla $f \in BV([a,b])$

$$||f||_{BV} = ||f||_1 + inf_{f_1 = f\, a.e} V_{[a,b]} f_1$$

Uwaga

Prostym wnioskiem z powyższej definicji jest to , że $BV([a,b])$ jest gęste w $L^1([a,b])$

Operator Frobeniusa- Perrona

- Niech X będzie zmienną losową na przestrzeni $I = [a, b]$ z funkcją gęstości f . Wówczas dla dowolnego mierzalnego zbioru $A \in I$, $P(X \in A) = \int_A f d\lambda$ gdzie λ jest znormalizowaną miarą Lebesgue'a.

- Możemy teraz się spytać jak będzie wyglądać funkcja gęstości dla zmiennej losowej $\tau(X)$ gdzie $\tau : I \to I$ jest niesingularnym przekształceniem.

- Niech $\tau : I \to I$ będzie jak wyżej . Wówczas dla $f \in L^1$ i A będącego dowolnym zbiorem mierzalnym defniujemy $\mu(A) = \int_{\tau^{-1}(A)} f d\lambda$. Na mocy Twierdzenia Radona-Nikodyma istnieje funkcja $\phi \in L^1$ taka, że $\mu(A) = \int_A \phi d\lambda$ dla wszystkich mierzalnych zbiorów A.

Operator Frobeniusa- Perrona

- Taką funkcję ϕ będziemy oznaczać jako $P_\tau f$.
- Definicja: Niech $I = [a, b]$, B będzie σ-ciałem borelowskich podzbiorów I i niech λ będzie znormalizowaną miarą Lebegue'a na I. Niech $\tau : I \to I$ będzie niesingularnym przekształceniem . Definiujemy operator Frobeniusa-Perrona jako $P_\tau : L^1 \to L^1$ takie , że dla każdego $f \in L^1$, $P_\tau f$ jest funkcją w L^1 taką, że dla każdego $A \in B$, zachodzi $\int_A P_\tau f d\lambda = \int_{\tau^{-1}(A)} f d\lambda$

Stwierdzenie

Niech τ jak wyżej i niech $f^* \geq 0$, $f^* \in L^1$ i $||f^*||_1 = 1$. Wtedy $P_\tau f^* = f^*$ prawie wszędzie wtedy i tylko wtedy gdy miara , zdefiniowana jako $\mu(\tau^{-1}(A)) = \int_A f^* d\lambda$ jest τ - niezmiennicza

Istnienie bezwzględnie ciągłej niezmienniczej miary

Rozważmy przedział $I = [a, b]$ z znormalizowaną miarą Lebesgue'a na I. Niech $T(I)$ oznacza klasę przekształceń $\tau : I \to I$ spełniają następujące warunki:

- τ jest kawałkami rozszerzająca, czyli istnieje podział P na I taki , że τ jest $C^1(\mathbb{R})$ na każdym $I_i \subset I$ i $|\tau_i(x)| \geq \alpha > 1$ dla każdego i i dla wszystkich $x \in (a_{i-1}, a_i)$

- $g(x) \equiv 1/(|\tau'(x)|)$ jest funkcją o wahaniu ogranczonym , gdzie $\tau'(x)$ hest odpowiednią jednostronną pochodną w punktach końcowych P.

Twierdzenie Lasoty-Yorke'a

Lemat potrzebny do dowodu twierdzenia:

- Niech $\tau \in T(I)$. Wówczas istnieją takie stałe $0 < r < 1$, $C > 0$ i $R > 0$ takie , że dla dowolnej $f \in BV(I)$ i dowolnego $n \geq 1$

$$||P_\tau^n f|| \leq Cr^n ||f||_{BV} + R||f||_1$$

Główne twierdzenie prezentacji:

Twierdzenie Lasoty-Yorke'a: Weźmy $\tau \in T(I)$. Wtedy zdaje ono bezwzględnie ciągłą niezmienniczą miarę której gęstość ma ograniczone wahanie.

Koniec