Twierdzenie Hahna-Banacha o rozkładzie

Adam Biniszewski

Proseminarium licencjackie "Wybrane zagadnienia analizy matematycznej"

7 maja 2020

Miara - podstawowe pojęcia

Niech B - σ-ciało w zbiorze X.

E_i - przeliczalna rodzina elementów rodziny B.

Rozkład zbioru E:

$$\bigcup E_i = E$$

oraz $E_i \cup E_j = \emptyset$, gdy i $\neq j$.

Miara zespolona na B

To funkcja zespolona $\mu : B \rightarrow \mathbb{C}$ taka, że

$$\mu(E) = \sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

(E $\in B$) dla dowolnego rozkładu E$_i$ zbioru E.

Własności miary zespolonej

Na mocy przeliczalnej addytywności miary zespolone tworzą przestrzeń liniową.

W odróżnieniu od miar dodatnich szereg

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(E_i)$$

jest zbieżny. Suma zbiorów E_i nie ulega zmianie przy permutacji indeksów, więc szereg pozostaje zbieżny, a nawet bezwzględnie zbieżny.

Wariacja miary

Rozważmy problem: majoryzujemy daną miarę zespoloną μ na B:
$\forall E \subset B \ |\mu(E)| \leqslant \lambda(E)$

$\lambda(E) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(E_i) \geqslant \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|$

Definicja wariacji miary

$$|\mu|(E) = sup \sum_{i=1}^{n} |\mu(E_i)|,$$

gdzie kres górny został wzięty po wszystkich rozkładach zbioru E.

Przykład: miara skupiona w dwóch punktach.

Wariacja miary jest normą.

Rozkład Jordana

Teraz ograniczymy nasze rozważania do miary rzeczywistej μ określonej na σ-ciele B - nazywamy je czasem miarami uogólnionymi.

Określając funkcję $|\mu|$ jak poprzednio, połóżmy:

$$\mu^+ = \tfrac{1}{2}(|\mu| + \mu) \qquad\qquad \mu^- = \tfrac{1}{2}(|\mu| - \mu)$$

Funkcje μ^+ i μ^- są ograniczonymi miarami dodatnimi na B. Ponadto:

$$\mu = \mu^+ - \mu^- \qquad\qquad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

μ^+ jest nazywane wariacją dodatnią, a μ^- - wariacją ujemną.

Rozkład Jordana

Przedstawienie miary μ w postaci różnicy miar dodatnich μ^+ i μ^- jest znane jako **rozkład Jordana**. Ma on pewne minimalne własności spośród wszystkich przedstawień miary μ w postaci różnicy dwu miar dodatnich.

Twierdzenie o postaci brzegowej miary μ

Jest ono wnioskiem z twierdzenia Radona-Nikodyma.
Załóżmy, że μ jest miarą zespoloną określoną na σ-ciele B podzbiorów zbioru X. Istnieje wówczas funkcja mierzalna h taka, że $|h(x)| = 1$ dla każdego x $\in X$ oraz:

$$d\mu = hd\,|\mu|\,(1)$$

Przez analogię do przedstawienia liczby zespolonej w postaci iloczynu jej wartości modułu przez liczbę o wartości bezwzględnej równej 1 równanie (1) jest nazywane postacią biegunową (lub rozkładem biegunowym) miary μ.

Twierdzenie Hahna o rozkładzie

Niech μ - miara rzeczywista określona na σ-ciele $\mathcal{F}$ w zbiorze X. Wtedy istnieją takie zbiory A, B $\subset \mathcal{F}$, że $A \cup B = X$ i $A \cap B = \emptyset$ oraz takie, że wariacje: dodatnia μ^+ i ujemna μ^- miary μ spełniają:

$$\mu^+(E) = \mu(A \cap E) \qquad \mu^-(E) = -\mu(B \cap E),$$

gdzie E $\in \mathcal{F}$.

Parę (A, B) nazywamy **rozkładem Hahna** zbioru X wyznaczonym przez miarę μ.

Twierdzenie Hahna o rozkładzie - dowód

Twierdzenie o postaci biegunowej zapewnia istnienie funkcji h takiej, że d$\mu = hd\,|\mu|$ $i\,|h| = 1$. μ jest miarą rzeczywistą, więc h jest funkcją rzeczywistą prawie wszędzie. Zatem h $= \pm 1$.
Rozdzielmy teraz wszystkie x na dwa zbiory:
A - zbiór takich x, że h(x) $=$ 1, B - zbiór takich x, że h(x) $=$ -1.
Wiemy, że

$$\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$$

oraz

$$\frac{1}{2} * (1 + h) = \begin{cases} h & \text{na zbiorze A} \\ 0 & \text{na zbiorze B} \end{cases}$$

Twierdzenie Hahna o rozkładzie - dowód (cd.)

Zatem dla dowolnego zbioru $E \in \mathcal{F}$ zachodzi:

$$\mu^+(E) = \frac{1}{2} * \int_E (1+h) d\,|\mu| = \int_{E \cap A} hd\,|\mu| = \mu(E \cap A).$$

Ponadto z tego, że $\mu^+(E) = \mu(A \cap E)$
wynika: $\mu^-(E) = -\mu(B \cap E)$, ponieważ:

$$\mu(E) = \mu(E \cap A) + \mu(E \cap B) \text{ oraz } \mu = \mu^+ - \mu^-.$$

Wniosek z tw. Hahna o rozkładzie

Jeżeli $\mu = \lambda_1 - \lambda_2$, gdzie λ_1, λ_2−miary dodatnie, to $\lambda_1 \geqslant \mu^+$ i $\lambda_2 \leqslant \mu^-$.

Jest to własność minimalności rozkładu Jordana, której temat został poruszony przy okazji wariacji dodatniej i wariacji ujemnej.

Dowód:
Skoro $\mu \leqslant \lambda_1$, to $\mu^+(E) = \mu(E \cap A) \leqslant \lambda_1(E \cap A) \leqslant \lambda_1(E)$, c.n.d.

Dziękuję Państwu za uwagę!