Rachunek wariacyjny w Nowicy 2023

Setup

$k, n \in \mathbb{N}$, $\quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^k$ otwarty ograniczony,

$F : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}$ Borelowska, (np. ciągła) nieujemna

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \arrow[dl, shift left, "\mathbb{p}"] \arrow[d, shift left, "q"] \arrow[dr, shift left, "r"] & \\
\mathbb{R}^k \arrow[ur, shift left, "\mathbb{p}^T"] & \mathbb{R}^n \arrow[u, shift left, "q^T"] & \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n) \arrow[ul, shift left, "r^T"]
\end{tikzcd}$$

Rozważamy funkcjonał

$$\mathcal{F}(u) = \int F(x, u(x), Du(x))\, d\mathcal{L}^k(x) \in \overline{\mathbb{R}}$$

dla $u \in \mathcal{A}$ ← rodzina konkurentów (rywali)

Np. $\mathcal{A} = C^1_{u_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

$$= C^0(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \cap \{ u : u|\Omega \in C^1,\ u|\partial\Omega = u_0 \}$$

gdzie $u_0 \in C^0(\partial\Omega, \mathbb{R}^n)$ to ustalona funkcja.

Jeśli u jest minimum $\mathcal{F}$, to dla każdej funkcji $v \in C^1_c(\Omega, \mathbb{R}^n)$ i $t \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$u + tv \in C^1_{u_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

oraz
$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u+tv) = 0 \qquad \text{o ile istnieje.}$$

Załóżmy, że F jest klasy C^1.
Zauważmy, że
$$F(x, u(x), Du(x)) = F\left(p^T(x) + q^T \circ u(x) + r^T \circ Du(x)\right)$$
dla $x \in \Omega$.

W takim razie

$$\frac{d}{dt} F\left(x, (u+tv)(x), D(u+tv)(x)\right)$$
$$= \frac{d}{dt} F\left(p^T(x) + q^T \circ (u+tv)(x) + r^T \circ D(u+tv)(x)\right)$$
$$= DF\left(x, (u+tv)(x), D(u+tv)(x)\right)\left(q^T \circ v(x) + r^T \circ Dv(x)\right)$$

Otrzymujemy

$$\mathcal{F}(u+tv) - \mathcal{F}(u)$$
$$= \int_\Omega F\left(x, (u+tv)(x), D(u+tv)(x)\right) - F(x, u(x), Du(x))\, d\mathcal{L}^k(x)$$
$$= \int_\Omega F\left(x, (u+sv)(x), D(u+sv)(x)\right)\Big|_{s=0}^{s=t} d\mathcal{L}^k(x)$$

$$= \int_\Omega \int_0^t \frac{d}{ds} F\big(x, (u+sv)(x), D(u+sv)(x)\big)\, ds \; d\mathcal{L}^k(x)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^t \underbrace{\int_\Omega DF\big(x, (u+sv)(x), D(u+sv)(x)\big)\Big(q^T(v(x)) + r^T(Dv(x))\Big)\, d\mathcal{L}^k(x)}_{\Psi_v(s)}\, ds$$

Zatem jeśli funkcja

$$\Psi_v = \left[s \longmapsto \int_\Omega DF\big(x, (u+sv)(x), D(u+sv)(x)\big)\Big(q^T(v(x)) + r^T(Dv(x))\Big)\, d\mathcal{L}^k(x) \right]$$

jest ciągła w 0, to dostaniemy

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{F}(u+tv) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\Big(\mathcal{F}(u+tv) - \mathcal{F}(u)\Big)$$

$$= \frac{1}{t}\int_0^t \Psi_v(s)\, ds = \Psi_v(0)$$ ← o ile Ψ_v ciągła w 0.

$$= \int_\Omega DF\big(x, u(x), Du(x)\big)\Big(q^T(v(x)) + r^T(Dv(x))\Big)\, d\mathcal{L}^k(x)$$

Przepiszemy równanie $\Psi_v(0) = 0$ w innej postaci.

$$\int_\Omega DF(\cdot, u, Du)\big(q^T\circ v + r^T\circ Dv\big)\, d\mathcal{L}^k$$

$$= \int_\Omega \operatorname{grad} F(\cdot, u, Du) \bullet \big(q^T\circ v + r^T\circ Dv\big)\, d\mathcal{L}^k$$

$$= \int_\Omega q\big(\operatorname{grad} F(\cdot, u, Du)\big) \bullet v \; d\mathcal{L}^k$$

$$+\int_\Omega \sigma(\operatorname{grad} F(\cdot, u, Du)) \bullet Dv \, d\mathcal{L}^k$$

iloczyn skalarny w $\operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

tj. $A \bullet B = \operatorname{trace}(A^T \circ B)$

$= \sum_{i=1}^k Ae_i \bullet Be_i$

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Hom}(X, \mathbb{R}) & \ni & DF(a) \\ \simeq \uparrow \beta & & \\ X & \ni & \operatorname{grad} F(a) \\ \parallel & & \end{array}$$

$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \times \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$, $\beta(u)v = u \bullet v$

Niech $e_1 \ldots e_k$ to baza std. $\mathbb{R}^k$,

zaś $G : \Omega \to \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

$$G(x) = \sigma(\operatorname{grad} F(x, u(x), Du(x))) \quad \text{dla } x \in \Omega.$$

Całkujemy ostatnie wyrażenie przez części

biorąc pod uwagę, że $v|\partial\Omega \equiv 0$.

$$\int_\Omega G(x) \bullet Dv(x) \, d\mathcal{L}^k(x)$$

$$= \int_\Omega \sum_{i=1}^k G(x)e_i \bullet Dv(x)e_i \, d\mathcal{L}^k(x)$$

$$= -\int_\Omega \sum_{i=1}^k DG(x)e_i e_i \bullet v(x) \, d\mathcal{L}^k(x)$$

Ostatecznie dostajemy:

$$\Psi_v(0) = \int_\Omega \left(q(\operatorname{grad} F(\cdot, u, Du)) - \sum_{i=1}^k DG(\cdot)e_i e_i \right) \bullet v \, d\mathcal{L}^k$$

Jeśli u jest minimum $\mathcal{F}$, to $\Psi_v(0) = 0$

dla wszystkich $v \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^n)$, zatem

<u>Lemat</u>: $\forall \varphi \in C_c^0(\Omega) \int_\Omega f \cdot \varphi \, d\mathcal{L}^k = 0 \Rightarrow f = 0 \ \mathcal{L}^k\text{-p.w.}$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} DG(x)\, e_i e_i = q\big(\operatorname{grad} F(x, u(x), Du(x))\big) \in \mathbb{R}^n \quad \text{dla } \mathcal{L}^k\text{- p.w. } x \in \Omega .}$$

układ n równań różniczkowych 2 stopnia na u

Równania Eulera-Lagrange'a.

Przykład:

$$F(x, y, \phi) = |\phi|^s$$

dla $x \in \Omega$, $y \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in Hom(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n)$

gdzie $|\phi| = \sqrt{\phi \bullet \phi}$, $p > 0$.

iloczyn Hilberta-Schmidta.

Mamy

$$p(\operatorname{grad} F) = 0$$

$$q(\operatorname{grad} F) = 0$$

$$r\big(\operatorname{grad} F(x, y, \phi)\big) = s\, |\phi|^{s-1} \cdot \frac{\phi}{|\phi|}$$

$$= s\, |\phi|^{s-2} \phi$$

Zatem

$$G(x) = s\, |Du(x)|^{s-2} Du(x) \quad \text{dla } x \in \Omega .$$

Równania spełnione przez minima (i punkty krytyczne) funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int_\Omega |Du|^s \, d\mathcal{L}^k$$

wyglądają następująco:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} DG(x)e_i e_i \bullet w$$

$$= \sum_{i=1}^{k} D\left[a \mapsto s|Du(a)|^{s-2} Du(a)e_i \bullet f \right](x)\, e_i$$

$$= \sum_{i=1}^{k} D\left[a \mapsto s|Du(a)|^{s-2} Du(a)^T f \bullet e_i \right](x)\, e_i$$

$$= \operatorname{div}\left(s|Du|^{s-2} Du(\cdot)^T w \right) \qquad \text{dla każdego } w \in \mathbb{R}^n.$$

W szczególności jeśli $n=1$, to otrzymujemy równanie

$$\operatorname{div}\left(|\operatorname{grad} u|^{s-2} \cdot \operatorname{grad} u \right) = 0.$$

mówimy, że u jest s-harmoniczna

Jeśli $\begin{cases} n=1 \\ s=2 \end{cases}$, to p-ty krytyczne funkcjonału

$$\mathcal{F}(u) = \int |Du|^2 \, d\mathcal{L}^n$$

spełniają równanie

$$\Delta u = 0$$ czyli są to funkcje harmoniczne.

<u>Uwaga</u>. Może się zdarzyć, szczególnie gdy $n > 1$, że punkty krytyczne (a nawet minima) nie będą klasy C^1!

Direct Method

Jak pokazać, że minimum istnieje?

Załóżmy, że $\mathcal{F}$ nieujemna oraz, że istnieje co najmniej jedna funkcja $\bar{u} \in \mathcal{A}$ t. że $\mathcal{F}(\bar{u}) < \infty$. Wówczas wiadomo, że

$$0 \leq \inf\{\mathcal{F}(u) : u \in \mathcal{A}\} \leq \mathcal{F}(\bar{u}) < \infty$$

i możemy znaleźć ciąg minimalizujący $u_1, u_2, \ldots \in \mathcal{A}$ t. że

$$\lim_{i \to \infty} \mathcal{F}(u_i) = \inf\{\mathcal{F}(u) : u \in \mathcal{A}\} \in \mathbb{R}.$$

Ponadto możemy założyć, że

$$\forall i \quad \mathcal{F}(u_i) \leq \mathcal{F}(\bar{u}).$$

Chcemy wybrać podciąg ciągu $\{u_1, u_2, \ldots\}$ zbieżny w jakiejś topologii na $\mathcal{A}$.

Innymi słowy:
chcemy zadać na $\mathcal{A}$ taką topologię, by zbiory:

$$\mathcal{A} \cap \{u : \mathcal{F}(u) \leq C\} \quad \text{dla } C \in \mathbb{R}$$

były zwarte (przynajmniej ciągowo)

oraz by funkcjonał $\mathcal{F}$ był w tej topologii dolnie półciągły, czyli by zbiory

$\mathcal{A} \cap \{ u : \mathcal{F}(u) \leq c \}$ były domknięte.

<u>Przykład</u> Niech $F(x, y, \phi) = |\phi|^p$ i $p > 1$.

Rozpatrujemy

$$C^1_{u_0}(\Omega, \mathbb{R}^n) \cap \left\{ u : \int_\Omega |Du|^p \, d\mathcal{L}^k \leq C \right\}$$

i zakładamy, że $\mathcal{F}(u_0) < \infty$.

Zanurzamy $C^1_{u_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$

w $L^p(\Omega, \mathbb{R}^n) \times L^p(\Omega, \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^n))$

przekształceniem

$$u \longmapsto (u, Du).$$

Domknięcie obrazu to p-ń Sobolewa

$$W^{1,p}_{u_0}(\Omega, \mathbb{R}^n)$$

Tw. Banacha - Alaoglu mówi, że w słabej * topologii zbiory domknięte i ograniczone są zwarte.

Geometryczny rachunek wariacyjny

Setup: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ otwarty

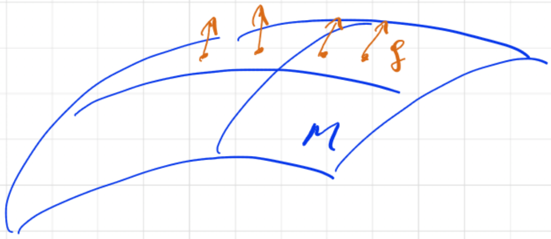
$F: U \times G(n,k) \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\Phi_F(M) = \int_M F(x, \mathrm{Tan}(M,x))\, d\mathcal{H}^k(x)$$

dla $M \subseteq U$ podrozmaitość klasy C^1.

Powtarzamy wszystkie kroki jak poprzednio.

* rozważamy deformacje M przez pole wektorowe $g: U \longrightarrow \mathbb{R}^k$



h_t potok g

* $$\underbrace{\delta_F M(g)}_{\text{pierwsza wariacja}} = \frac{d}{dt} \Phi_F(h_t[M]) \Big|_{t=0} = 0$$

pierwsza wariacja

(coś jak równanie E-L)

* uzupełniamy rodzinę rozmaitości w $\mathcal{U}$ (np. rozważamy stowarzyszone miary) tak, by ciąg minimalizujący do czegoś zbiegał.

* walczymy o półciągłość z dołu funkcjonału Φ_f.

Może się okazać, że trzeba czekać bardzo długo, zanim dostanie się jakieś dane potwierdzające teorię. Z tego powodu nie należy się zbytnio przejmować tym, czy twoje pomysły są prawdziwe, czy nie. Zamiast tego trzeba zapytać, czy te badania są użyteczne. Ja nie moge narzekać − nie wiem, czy moje teorie są prawdziwe, ale badania nad nimi są dla mnie użyteczne. Sprawiają mi radość i zapewniły mi pracę i pensję przez pięćdziesiąt lat.

Bernard Carr
https://en.wikipedia.org/wiki/Bernard_Carr

Zgłębianie matematyki prędzej czy później musi doprowadzić do uprawiania jej dla samej siebie.

Michał Heller
https://pl.wikipedia.org/wiki/Micha%C5%82_Heller