Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki

Iwona Skrzypczak
Nr albumu: 234459

Metody Derricka-Pohożajewa i twierdzenia o nieistnieniu dla zagadnień eliptycznych

Praca licencjacka
na kierunku MATEMATYKA
w ramach Międzywydziałowych Indywidualnych Studiów Matematyczno-Przyrodniczych

Praca wykonana pod kierunkiem
dr hab. Agnieszki Kałamajskiej
Instytut Matematyki

Październik 2008

Oświadczenie kierującego pracą

Potwierdzam, że niniejsza praca została przygotowana pod moim kierunkiem i kwalifikuje się do przedstawienia jej w postępowaniu o nadanie tytułu zawodowego.

Data Podpis kierującego pracą

Oświadczenie autora pracy

Świadom odpowiedzialności prawnej oświadczam, że niniejsza praca dyplomowa została napisana przeze mnie samodzielnie i nie zawiera treści uzyskanych w sposób niezgodny z obowiązującymi przepisami.

Oświadczam również, że przedstawiona praca nie była wcześniej przedmiotem procedur związanych z uzyskaniem tytułu zawodowego w wyższej uczelni.

Oświadczam ponadto, że niniejsza wersja pracy jest identyczna z załączoną wersją elektroniczną.

Data Podpis autora pracy

Streszczenie

W pracy przedstawiono kilka twierdzeń o nieistnieniu rozwiązań dla równań i nierówności różniczkowych cząstkowych. Rozpatrywane są zagadnienia postaci $-\Delta_p u = \lambda |u|^{q-1} u$ oraz $-\Delta_p u \geqslant u^q$. Dowody twierdzeń bazują na metodzie Derricka – Pohożajewa polegającej na mnożeniu obu stron równania (nierówności) przez odpowiednie funkcje, a następnie całkowaniu ich przez części. Jako narzędzia pomocnicze wykorzystuje się wielokrotnie nierówności Younga i Höldera.

Słowa kluczowe

tożsamość Derricka-Pohożajewa, nieistnienie rozwiązań, p-Laplasjan

Dziedzina pracy (kody wg programu Socrates-Erasmus)

11.1 Matematyka

Klasyfikacja tematyczna

35A05 General existence and uniqueness theorems
35D05 Existence of generalized solutions
35G30 Boundary value problems for nonlinear higher-order PDE
35G20 General theory of nonlinear higher-order PDE

Tytuł pracy w języku angielskim

Derrick-Pohozhaev nonexistence results for nonlinear elliptic PDEs.

Spis treści

Wprowadzenie

Podstawową sprawą dla analityka jest poprawność postawienia zagadnienia które bada. Zagadnienie jest postawione poprawnie jeśli jego rozwiązanie istnieje i jest jednoznaczne w zadanej klasie oraz zależy w sposób ciągły (lub gładki) od danych początkowych. W tej pracy skupiamy się na pierwszej z powyższych cech zagadnienia - na jego istnieniu.

Dowody omawianych twierdzeń bazują na metodzie Derricka – Pohożajewa, polegającej na mnożeniu obu stron równania (nierówności) przez odpowiednie funkcje, a następnie całkowaniu ich przez części. Jako narzędzia pomocnicze w dowodzeniu wykorzystuje się nierówności Younga i Höldera.

W rozdziale 1 przedstawiamy podstawowe fakty potrzebne przy dowodzeniu. Rozdział 2 wprowadza w metody Derricka – Pohożajewa. Pokazujemy w nim nieistnienie klasycznych rozwiązań, na obszarze gwiaździstym, dla równania różniczkowego cząstkowego $-\Delta u = |u|^{q-1}u$. Następnie pokazujemy uogólnienie powyższego twierdzenia - nieistnienie rozwiązań, na obszarze gwiaździstym, dla p-Laplasjanu: $-\Delta_p u = \lambda |u|^{q-1}u$. W dowodach wykorzystujemy *tożsamość Derricka-Pohożajewa.* W Rozdziale 3 dowodzimy twierdzenie o nieistnieniu rozwiązań nieujemnych dla nierówności z p-Laplasjanem ($-\Delta_p u \geqslant u^q$) na $\mathbb{R}^n$ w klasie nieujemnych funkcji typu

$$S_\alpha = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : \quad \Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Bardziej precyzyjną definicję zamieszczamy w Rozdziale 1, natomiast jej szczegółowe omówienie w Rozdziale 3.1.

W tym miejscu pragnę gorąco podziękować pani dr hab. Agnieszce Kałamajskiej oraz panu Piotrowi Nayarowi za serdeczną i cierpliwą pomoc w przygotowaniu tej pracy.

Rozdział 1

Wstęp

W tym rozdziale zostały zebrane podstawowe informacje niezbędne przy czytaniu tej pracy.

1.1. Definicje

Definicja 1.1. *Niech* $1 < p < \infty$. *p-Laplasjanem funkcji* $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *(ozn.* $\Delta_p u$*) nazwiemy funkcję określoną formułą*

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|Du|^{p-2} Du), \tag{1.1}$$

gdzie pochodne $D_i u$, $i = 1, ..., n$ *są rozumiane w sensie dystrybucyjnym.*

Skoro $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p > 1$, to każda składowa wektora $|Du|^{p-2}Du$ należy do $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$, zatem dywergencja tego wektora jest dobrze określona w słabym sensie.

Definicja 1.2. *Niech* $\alpha < 0$, $p > 1$ *i* $q \geqslant 0$. *Zdefiniujmy zbiór* S_α *następująco:*

$$S_\alpha = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : \quad \Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\}. \tag{1.2}$$

1.2. Podstawowe nierówności

Twierdzenie 1.2.1 (Nierówność Younga)**.** *Jeśli* $a, b > 0$, $1 < p$, $q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *to*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.2.2 (Nierówność Schwartza)**.** *Jeśli* $x, y \in \mathbb{R}^n$, *a* $< \cdot \ , \ \cdot >$ *jest iloczynem skalarnym, to*

$$| < x, y > | \leqslant |x| \cdot |y|. \tag{1.4}$$

Twierdzenie 1.2.3 (Nierówność Höldera)**.** *Jeśli* $1 \leqslant p$, $q \leqslant \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, U *jest pewnym obszarem oraz* $u \in L_p(U)$, $v \in L_q(U)$, *to*

$$\int_U |uv| dx \leqslant \left(\int |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int |v|^q dx \right)^{\frac{1}{q}} \tag{1.5}$$

1.3. Oznaczenia

Fragmenty tej pracy, które nie były całkiem szczegółowo opisane w tekstach źródłowych i zostały doprecyzowane, zostały oznaczone symbolem „★”.

Rozdział 2

Tożsamość Derricka-Pohożejewa i zagadnienia na ograniczonych obszarach gwiaździstych

Jako wprowadzenie do zagadnień eliptycznych na $\mathbb{R}^n$ przedstawimy dwa twierdzenia o nieistnieniu rozwiązań klasycznych zagadnień zadanych na obszarze gwiaździstym. Pierwsze z nich dotyczyć będzie równania z Laplasjanem po lewej stronie, drugie - z p-Laplasjanem. Metoda dowodzenia obu twierdzeń polega na odcałkowaniu wyjściowego równania pomnożonego przez dwie różne funkcje: $x \cdot Du$ oraz u, co prowadzi do sprzecznych tożsamości. Ponadto wykorzystamy w dowodach jedynie pewien fakt geometryczny dotyczący obszaru gwiaździstego, który omawiamy poniżej.

2.1. O pewnej własności geometrycznej obszaru gwiaździstego

Obszar, na jakim mamy zadane równanie musi spełniać pewien warunek geometryczny.

Definicja 2.1. *Powiemy, że zbiór otwarty U jest gwiaździsty względem punktu 0, jeśli dla każdego $x \in \overline{U}$ odcinek $\{\lambda x : 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$ jest zawarty w $\overline{U}$.*

W dowodzie twierdzenia skorzystamy z następującej własności zbioru gwiaździstego:

Lemat 2.1 (Wektor normalny do brzegu obszaru gwiaździstego)**.** *Załóżmy, że ∂U jest klasy C^1, a U jest gwiaździsty względem 0. Wówczas*

$$x \cdot \nu(x) \geqslant 0$$

dla wszystkich $x \in \partial U$, gdzie ν oznacza jednostkowy wektor normalny zewnętrzny.

Dowód. Ponieważ ∂U jest klasy C^1, więc jeśli $x \in \partial U$, to dla każdego $\varepsilon > 0$ istnieje liczba $\delta > 0$ taka, że z warunków $|y - x| < \delta$ i $y \in \overline{U}$ wynika, że $\nu(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leqslant \varepsilon$. W szczególności

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in \overline{U}}} \nu(x) \cdot \frac{(y-x)}{|y-x|} \leqslant 0.$$

Niech $y = \lambda x$ dla $0 < \lambda < 1$. Wtedy $y \in \overline{U}$, gdyż U jest gwiaździsty względem 0. Zatem

$$\nu(x) \cdot \frac{x}{|x|} = - \lim_{\lambda \to 1^-} \nu(x) \cdot \frac{(\lambda x - x)}{|\lambda x - x|} \geqslant 0.$$

To kończy dowód lematu. ■

2.2. Równanie niemożliwe dla operatora Laplace'a

Twierdzenie 2.2.1. *Niech U będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0, którego brzeg jest klasy C^1. Ponadto niech $\frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1} > 0$. Wówczas zagadnienie*

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & w \quad U, \\ u = 0 & na \quad \partial U, \\ u \not\equiv 0 & na \quad \overline{U} \end{cases} \tag{2.1}$$

nie ma rozwiązań w klasie $C^2(\overline{U})$.

Dowód. Załóżmy, że $u \in C^2(\overline{U})$ jest rozwiązaniem (2.1).

Krok 0. Mnożąc obie strony równania (2.1) przez $x \cdot Du$ i całkując po U, otrzymujemy

$$\int_U (-\Delta u)(x \cdot Du)dx = \int_U (|u|^{q-1}u)(x \cdot Du). \tag{2.2}$$

Oznaczmy lewą stronę przez A, a prawą przez B.

Krok 1. Wówczas

$$A = -\sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_ix_i} x_j u_{x_j} dx = \sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_i}(x_j u_{x_j})_{x_i} dx - \sum_{i,j=1}^n \int_{\partial U} u_{x_i} \nu^i x_j u_{x_j} dS =: A_1 + A_2. \tag{2.3}$$

Przy tym

$$A_1 = \sum_{i,j=1}^n \int_U u_{x_i}\delta_{ij}u_{x_j} + u_{x_i}x_j u_{x_jx_i} dx = \int_U |Du|^2 + \sum_{j=1}^n \left(\frac{|Du|^2}{2}\right)_{x_j} x_j dx =$$

$$= \left(1 - \frac{n}{2}\right)\int_U |Du|^2 dx + \int_{\partial U} \frac{|Du|^2}{2}(\nu \cdot x)dS. \tag{2.4}$$

Z drugiej strony, skoro $u = 0$ na ∂U, więc gradient $Du(x)$ jest równoległy do wektora normalnego $\nu(x)$. Zatem $Du(x) = \pm|Du(x)|\nu(x)$. Korzystając z tej równości, stwierdzamy, że

$$A_2 = -\int_{\partial U} |Du|^2(\nu \cdot x)dS. \tag{2.5}$$

Łącząc (2.3)-(2.5) otrzymujemy

$$A = \frac{2-n}{2}\int_U |Du|^2 dx - \frac{1}{2}\int_{\partial U} |Du|^2(\nu \cdot x)dS.$$

Krok 2. Wracając do (2.2), wyliczymy B stosując wzór na słabą pochodną: $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) = |u|^q \frac{u}{|u|} \cdot u_{x_j}$. Zauważmy, że funkcja $\frac{|u|^{q+1}}{q+1}$ jest elementem przestrzeni Sobolewa $W_0^{1,1}(\Omega)$, można więc zastosować do niej wzór na całkowanie przez części ([3], par. 1.1.3.). Obliczamy

$$B = \sum_{j=1}^n \int_U |u|^{q-1}ux_j u_{x_j} dx = \sum_{j=1}^n \int_U \left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right)_{x_j} x_j dx = -\frac{n}{q+1}\int_U |u|^{q+1}dx.$$

Krok 3. Z tego rachunku i równości (2.2) wynika, że

$$\frac{n-2}{2}\int_U |Du|^2 dx + \frac{1}{2}\int_{\partial U} |Du|^2(\nu \cdot x)dS = \frac{n}{q+1}\int_U |u|^{q+1}dx. \tag{2.6}$$

Równość ta nazywana jest ***tożsamością Derricka-Pohożajewa***.

Zbiór U jest gwiaździsty, więc posługując się lematem, otrzymujemy z (2.6) nierówność

$$\frac{n-2}{2}\int_U |Du|^2 dx \leqslant \frac{n}{q+1}\int_U |u|^{q+1} dx. \tag{2.7}$$

Jednakże, mnożąc równanie $-\Delta u = |u|^{q-1}u$ przez u i całkując przez części, uzyskujemy tożsamość

$$\int_U |Du|^2 dx = \int_U |u|^{q+1} dx.$$

Wstawiając ten wynik do (2.7), stwierdzamy, że

$$\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1}\right)\int_U |u|^{q+1} dx \leqslant 0.$$

Skoro jednak $u \not\equiv 0$, to $\left(\frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1}\right) \leqslant 0$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem. ■

2.3. Ugólnienie. Równania niemożliwe dla operatora p-Laplace'a

Twierdzenie 2.3.1. ★[1] *Niech U będzie obszarem gwiaździstym względem punktu 0, którego brzeg jest klasy C^1. Ponadto niech $\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q+1} - 1\right) > 0$. Wówczas zagadnienie*

$$\begin{cases} -\Delta_p u = |u|^{q-1}u & w \quad U, \\ u = 0 & na \quad \partial U, \\ u \not\equiv 0 & na \quad \overline{U} \end{cases} \tag{2.8}$$

nie ma rozwiązań w klasie $C^2(\overline{U})$.

Dowód. Załóżmy, że $u \in C^2(\overline{U})$ jest rozwiązaniem (2.8).

Krok 0. Mnożąc obie strony równania (2.8) przez $x \cdot Du$ i całkując po U, otrzymujemy

$$\int_U -\Delta_p u(x)(x \cdot Du(x))dx = \int_U (|u|^{q-1}u)(x \cdot Du)dx. \tag{2.9}$$

Oznaczmy lewą stronę przez A, a prawą przez B.

Krok 1. W tym kroku wyliczymy A. Przez $\nu(x)$ oznaczmy jednostkowy wektor normalny zewnętrzny w punkcie x, a przez ν^i jego i-tą współrzędną , a przez $\int_{\partial U} \dots dS$ - całkę względem pewnej miary określonej na brzegu obszaru U.

Skorzystamy ze wzoru

$$\text{div } (Fg) = g \text{ div } F + F \cdot Dg,$$

dla pola wektorowego $F = |Du|^{p-2}Du$ i funkcji $g = Du \cdot x$.

Wtedy

$$A = -\int_U (\Delta_p u)(Du \cdot x)dx = -\int_U (\text{div } (|Du|^{p-2}Du))(Du \cdot x)dx =$$

$$= -\int_U \text{div } \Big((|Du|^{p-2}Du)(Du \cdot x)\Big)dx + \int_U (|Du|^{p-2}Du) \cdot D(Du \cdot x)dx =: A_1 + A_2.$$

A_1 liczymy ze wzoru Gaussa-Ostrogradzkiego

$$A_1 = -\int_U \text{div } \Big((|Du|^{p-2}Du)(Du \cdot x)\Big)\, dx = -\int_{\partial U} \Big((|Du|^{p-2}Du)(Du \cdot x)\Big) \cdot \nu dS$$

[1] To twierdzenie może być znane specjalistom, ale nie ma go w literaturze.

ale $Du = \pm|Du| \cdot \nu$, zatem
$$A_1 = -\int_{\partial U} |Du|^p (x \cdot \nu) dS.$$
Rozważmy $A_2 = \int_U (|Du|^{p-2} Du) \cdot D(Du \cdot x) dx = \int_U |Du|^{p-2} \cdot a_2 \, dx$. Zauważmy, że
$$a_2 = Du \cdot D(x \cdot Du) = \sum_j u_{x_j} \left(\sum_i x_i u_{x_i} \right)_{x_j} = \sum_{i,j} u_{x_j} \left(\delta_{ij} u_{x_i} + x_i u_{x_i x_j} \right) =$$
$$= |Du|^2 + \sum_{i,j} u_{x_j} x_i u_{x_i x_j} = |Du|^2 + \sum_i x_i \left(\frac{|Du|^2}{2} \right)_{x_i}.$$
Stąd
$$A_2 = \int_U |Du|^p dx + \int_U |Du|^{p-2} \sum_i x_i \left(\frac{|Du|^2}{2} \right)_{x_i} dx =: B_1 + B_2.$$
Całkując B_2 otrzymujemy
$$B_2 = \int_U \sum_i |Du|^{p-2} x_i \left(\frac{|Du|^2}{2} \right)_{x_i} dx =$$
$$= -\int_U \sum_i \left(|Du|^{p-2} x_i \right)_{x_i} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) dx + \int_{\partial U} \sum_i |Du|^{p-2} x_i \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) \nu_i dS =: C_1 + C_2,$$
gdzie
$$C_1 = -\int_U \sum_i \left(|Du|^{p-2} x_i \right)_{x_i} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) dx = -\frac{1}{2} \int_U \sum_i |Du|^p dx - \int_U \sum_i (|Du|^{p-2})_{x_i} x_i \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) =$$
$$= -\frac{n}{2} \int_U |Du|^p dx - \frac{p-2}{2} \int_U |Du|^{p-2} \sum_{i,j} x_i u_{x_j} u_{x_i x_j} dx = -\frac{n}{2} B_1 - \frac{p-2}{2} B_2,$$
natomiast
$$C_2 = \int_{\partial U} |Du|^{p-2} \left(\frac{|Du|^2}{2} \right) (x \cdot \nu) dS = \frac{1}{2} \int_{\partial U} |Du|^p (x \cdot \nu) dS = -\frac{1}{2} A_1.$$
Stąd
$$B_2 = C_1 + C_2 = C_1 - \frac{1}{2} A_1 = -\frac{n}{2} B_1 - \frac{p-2}{2} B_2 - \frac{1}{2} A_1,$$
a co za tym idzie
$$B_2 = -\frac{1}{p}(A_1 + nB_1).$$
Podsumowując
$$A = A_1 + A_2 = A_1 + B_1 + B_2 = A_1 + B_1 - \frac{1}{p}(A_1 + nB_1) = \left(1 - \frac{n}{p}\right) B_1 + \left(1 - \frac{1}{p}\right) A_1.$$
Zatem
$$A = \left(1 - \frac{n}{p}\right) \int_U |Du|^p dx - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \int_{\partial U} |Du|^p (x \cdot \nu) dS.$$

Krok 2. Wracając do (2.9), wyliczymy B stosując wzór na słabą pochodną: $\frac{d}{dx_j}\left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right) = |u|^q \frac{u}{|u|} \cdot u_{x_j}$. Zauważmy, że funkcja $\frac{|u|^{q+1}}{q+1}$ jest elementem przestrzeni Sobolewa

$W_0^{1,1}(\Omega)$, można więc zastosować do niej wzór na całkowanie przez części ([3], par. 1.1.3.). Obliczamy

$$B=\sum_{j=1}^{n}\int_U |u|^{q-1}ux_ju_{x_j}dx=\sum_{j=1}^{n}\int_U\left(\frac{|u|^{q+1}}{q+1}\right)_{x_j}x_jdx=-\frac{n}{q+1}\int_U|u|^{q+1}dx.$$

Krok 3. Z tego rachunku i równości (2.9) wynika, że

$$\left(\frac{n}{p}-1\right)\int_U|Du|^pdx+\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_{\partial U}|Du|^p(x\cdot\nu)dS=\frac{n}{q+1}\int_U|u|^{q+1}dx. \tag{2.10}$$

Równość ta również nazywana jest ***tożsamością Derricka-Pohożajewa***.

Zbiór U jest gwiaździsty względem 0, więc posługując się Lematem 2.1, otrzymujemy z (2.10) nierówność

$$\left(\frac{n}{p}-1\right)\int_U|Du|^pdx\leqslant\frac{n}{q+1}\int_U|u|^{q+1}dx. \tag{2.11}$$

Jednakże, mnożąc równanie $-\Delta_pu=|u|^{q-1}u$ przez u i całkując przez części, uzyskujemy tożsamość

$$\int_U|Du|^pdx=\int_U|u|^{q+1}dx.$$

Wstawiając ten wynik do (2.11), stwierdzamy, że

$$\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q+1}-1\right)\int_U|u|^{q+1}dx\leqslant 0.$$

Skoro jednak $u\not\equiv 0$, to $\left(\frac{n}{p}-\frac{n}{q+1}-1\right)\leqslant 0$, co prowadzi do sprzeczności z założeniem. ■

Uwaga 2.3.1. *Przy założeniach powyższego twierdzenia zagadnienie*

$$\begin{cases}-\Delta_pu=\lambda|u|^{q-1}u & w \quad U,\\ u=0 & na \quad \partial U,\\ u\not\equiv 0 & na \quad \overline{U},\end{cases} \tag{2.12}$$

gdzie $\lambda>0$, nie ma rozwiązań w klasie $C^2(\overline{U})$.

Dowód. ★ Niech u spełnia założenia twierdzenia 2.3.1 i (2.12). Podstawmy $u_\gamma=\gamma\cdot u$, gdzie γ dobierzemy za chwilę. Wówczas

$$-\Delta_pu_\gamma=|\gamma|^{p-2}\gamma\cdot(-\Delta_pu)=|\gamma|^{p-2}\gamma\cdot(\lambda|u|^{q-1}u)=\frac{|\gamma|^{p-2}}{|\gamma|^{q-1}}\cdot\lambda|u_\gamma|^{q-1}u_\gamma=|u_\gamma|^{q-1}u_\gamma,$$

o ile $\lambda=\frac{|\gamma|^{q-1}}{|\gamma|^{p-2}}>0$. Zatem niech $\gamma=\lambda^{\frac{1}{p-q-1}}$. Wobec tych obliczeń, z twierdzenia 2.3.1, wynika nieistnienie rozwiązań zagadnienia (2.12) w klasie $C^2(\overline{U})$. ■

Uwaga 2.3.2.

Podstawmy $\widetilde{q}=q+1$ i zapiszmy równanie (2.12) w postaci

$$\begin{cases}-\Delta_pu=\lambda|u|^{\widetilde{q}-2}u & w \quad U,\\ u=0 & na \quad \partial U,\\ u\not\equiv 0 & na \quad \overline{U},\end{cases} \tag{2.13}$$

gdzie $\lambda > 0$. Z powyższego rozumowania wynika, że równanie (2.13) nie ma rozwiązań w klasie $C^2(\overline{U})$, gdy $\widetilde{q} > \frac{np}{n-p} = p_\star$ i $p < n$. Zauważmy, że $p_\star$ to współczynnik występujący w **nierówności Sobolewa**:

$$\left(\int |u|^{p_\star} dx\right)^{\frac{1}{p_\star}} \leqslant C \cdot \left(\int |Du|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Istotnie, warunek $\frac{n}{p} - \frac{n}{\widetilde{q}} - 1 > 0$ jest równoważny $-n > \widetilde{q}\left(1 - \frac{n}{p}\right) = \widetilde{q}\left(\frac{p-n}{p}\right)$. O ile $p < n$, to powyższa nierówność jest równoważna $\frac{np}{n-p} < \widetilde{q}$.

Rozdział 3

Nierówność na $\mathbb{R}^n$

W tym rozdziale zajmiemy się nieistnieniem rozwiązań w klasie S_α (zdefiniowanej w Rozdziale 1 oraz w treści twierdzenia) dla następującego zagadnienia:

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant u^q & w \quad \mathbb{R}^n, \\ u \geqslant 0, u \not\equiv 0 & na \quad \mathbb{R}^n, \end{cases} \tag{3.1}$$

przy pewnych założeniach na p oraz q.

Dowód twierdzenia bazuje na podobnej metodzie postępowania co dowody Twierdzenia 2.2.1 i Twierdzenia 2.3.1, technika tego dowodu jest jednak bardziej skomplikowana. Zaczynamy od mnożenia obu stron nierówności przez pewne funkcje i całkujemy obie strony. Następnie wykorzystując wielokrotnie elementarne nierówności typu Younga (wszystkie umieszczono w rozdziale 1.2) oraz całkowanie przez części dochodzimy do tezy.

Zaczniemy od rozważań o przestrzeni rozwiązań i lematów przydatnych w dowodzie.

3.1. Przestrzeń rozwiązań

★ Autorzy publikacji [1] proponują klasę

$$W^{1,p}_{\alpha,loc}(\mathbb{R}^n) = \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad u^{q+\alpha}, |Du|^p u^{\alpha-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)\},$$

gdzie $\alpha < 0$, dla zagadnienia (3.1) w dwóch przypadkach: $0 < p-1 < q \leqslant \frac{n(p-1)}{n-p}$ albo $0 \leqslant q \leqslant p-1$, $p > 1$ i $n \geqslant 1$.

Zauważmy jednak, że w tej klasie może ono mieć nietrywialne rozwiązania. W definicji klasy $W^{1,p}_{\alpha,loc}(\mathbb{R}^n)$ nie zakładamy, że $\Delta_p u(x)$ jest dobrze określony w każdym punkcie. Podamy przykład, w którym jest on określony prawie wszędzie.

Twierdzenie 3.1.1. ★ *Rozważmy $p = 2$, $q > 0$ dowolne, $n = 1$ oraz funkcję okresową o okresie $\frac{2}{7}$ określoną na odcinku $[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ wzorem*

$$u(x) = -7x^2 + \frac{6}{7}.$$

Dla tak określonego u zachodzi:

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant u^q & w \quad \mathbb{R}^n, \\ u \geqslant 0, u \not\equiv 0 & na \quad \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.2}$$

oraz

$$u \in W^{1,p}_{\alpha,loc}(\mathbb{R}^n).$$

Dowód. Oczywiście tak określone $u \geqslant 0,\ u \not\equiv 0$. Mamy nawet dla $q > 1$

$$u^q(x) \in \left[\left(\frac{5}{7}\right)^q, \left(\frac{6}{7}\right)^q\right],$$

a dla $q < 1$

$$u^q(x) \in \left[\left(\frac{6}{7}\right)^q, \left(\frac{5}{7}\right)^q\right],$$

czyli dla każdego q funkcja $u(x)$ jest daleko od zera i nieskończoności.

Zachodzi $u \in W^{1,p}_{\alpha,loc}(\mathbb{R}^n)$. Istotnie, funkcja wymierna, na obszarze ograniczonym, na którym jest izolowana od 0 i ∞ jest całkowalna z dowolną potęgą, zatem $u^{q+\alpha} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. W naszym przypadku, na przedziale $[-\frac{1}{7}, \frac{1}{7})$ mamy również:

$$|Du|^p u^{\alpha-1} = (14x)^2 \left(-7x^2 + \frac{6}{7}\right)^{\alpha-1} \in \left[0, \left(\frac{5}{7}\right)^{\alpha-1}\right],$$

więc $|Du|^p u^{\alpha-1} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Zauważmy, że prawie wszędzie

$$-\Delta_p u(x) = -u''(x) = 14$$

oraz dla każdego q

$$u^q < max\left\{\left(\frac{5}{7}\right)^q, \left(\frac{6}{7}\right)^q\right\} \overset{q>0}{<} 1.$$

Zatem prawie wszędzie

$$14 = -\Delta_p u \geqslant 1 > u^q.$$

■

Zauważmy również, że w przypadku klasy $W^{1,p}_{\alpha,loc}(\mathbb{R}^n)$ nawet Du nie jest dobrze określone, gdyż nie zakładamy, by funkcja u była lokalnie całkowalna. Tym bardziej nie wiadomo czym jest div $(|Du|^{p-2}Du) = \Delta_p u$. Możemy jednak, przy dodatkowych założeniach udowodnić nieistnienie nietrywialnych rozwiązań zagadnienia (3.1). W dowodzie twierdzenia będziemy chcieli pokazać nieistnienie nierówności pomiędzy całkami, więc musimy zakładać, że $\Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Ponadto, do Lematu 3.2 potrzebujemy, by $u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Dlatego też, jako przestrzeń rozwiązań proponujemy klasę:

$$S_\alpha = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) :\ \Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n),\ u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\}.$$

Zauważmy dodatkowo następujący fakt:

Uwaga 3.1.1. *Warunek $u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, gdzie $\alpha < 0$, implikuje, że warunek $\{u = 0\}$ może być spełniony tylko na zbiorze miary* 0 *(przy wyborze dowolnego reprezentanta w klasie $W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$).*

Otwarte pytanie. Nie wiemy jak możliwie ogólną klasę zamiast S_α można zaproponować, aby nadal nie istniały rozwiązania nierówności (3.1) na $\mathbb{R}^n$.

3.2. Lematy pomocnicze

W dowodzie twierdzenia 3.3.1 będziemy korzystali kilkakrotnie z następującej wersji nierówności Younga:

Lemat 3.1 (Nierówność Younga z parametrem)**.** *Jeśli* $a, b, \theta > 0,\ 1 < p,\ q < \infty,\ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$ *to*

$$ab \leqslant \frac{1}{p}(a\theta)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\theta}\right)^q. \tag{3.3}$$

Dowód. Skorzystamy z najbardziej powszechnej wersji nierówności Younga (1.3):

$$ab = (a\theta)\left(\frac{b}{\theta}\right) \overset{Young}{\leqslant} \frac{1}{p}(a\theta)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{b}{\theta}\right)^q.$$

■

Uwaga 3.2.1. *Mając daną liczbę* $a > 1$*, przez* a' *będziemy oznaczać liczbę do niej Hölderowsko sprzężoną,* $a' = \frac{a}{a-1}$*.*

W dowodzie twierdzenia 3.3.1 zastosujemy wzory z poniższego lematu.

Lemat 3.2. *Niech* $\alpha < 0,\ u \in S_\alpha,\ \varphi \in W_0^{1,\infty}(B(R))$ *i* $\operatorname{supp} \varphi \subseteq B(R)$*, gdzie* $B(R)$ *- kula o promieniu* R *i środku w* 0*. Wówczas*

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\text{div } (|Du|^{p-2}Du)(u^\alpha\varphi)dx \overset{(1)}{=} \int_{B(R)} |Du|^{p-2}Du \cdot D(u^\alpha\varphi)dx$$

$$\overset{(2)}{=} \alpha \int_{B(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx + \int_{B(R)} |Du|^{p-2}(Du \cdot D\varphi)u^\alpha dx$$

Dowód. ★ Zauważmy, że skoro $u^\alpha \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, a $\varphi \in W_0^{1,\infty}(B(R))$ i ma zwarty nośnik, to $v = u^\alpha\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ i ma zwarty nośnik. Łatwo pokazać, że $v \in W_0^{1,p}(B(R))$. Z założenia $u \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, zatem

$$|Du|^{p-2}Du \in L_{loc}^{p'}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p'}(\mathbb{R}^n), \tag{3.4}$$

gdzie $p' = \frac{p}{p-1}$, i $\Delta_p u = \text{div } (|Du|^{p-2}Du)$ wyznacza funkcjonał na $W_0^{1,p}(B(R))$ wzorem

$$(\Delta_p u, v) \overset{(3)}{=} -\int_{\mathbb{R}^n} |Du|^{p-2}Du \cdot Dvdx.$$

Z definicji klasy S_α wiemy, że funkcjonał ten jest wyznaczany przez funkcję lokalnie całkowalną, co oznacza, że $(\Delta_p u, v) = \int_{\mathbb{R}^n} w \cdot vdx$ dla pewnej funkcji $w \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, gdzie $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Zauważmy, że z powodu gęstości $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ w przestrzeni $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$, wzór (3) ma sens również dla $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ o zwartym nośniku. Rozważając $v = u^\alpha\varphi$ we wzorze (3) dostajemy wzór[1]:

$$\int_{\mathbb{R}^n} -\text{div } (|Du|^{p-2}Du)(u^\alpha\varphi)dx = \int_{B(R)} |Du|^{p-2}Du \cdot D(u^\alpha\varphi)dx. \tag{3.5}$$

Pozostaje uzasadnić wzór (2). Wiadomo ([3], par. 1.1.3.), że dla dowolnej funkcji $v \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^n)$, jej pochodna liczona w sensie dystrybucyjnym jest tym samym, co pochodna kierunkowa liczona klasycznie: $\frac{\partial v}{\partial x_i}(x)$, przy czym ostatni wzór ma sens dla prawie każdego x.

[1] Autorzy wybierając zbiór S_α nie założyli, że $u^\alpha \in L_{loc}^1$. Nie jest zatem oczywiste jak rozumieli całkowanie przez części we wzorze (3.5). Stąd nasze założenie $u^\alpha \in W_{loc}^{1,p}$.

Dla pochodnej klasycznej mamy:

$$D(u^\alpha \varphi) = D(u^\alpha) \cdot \varphi + u^\alpha D\varphi = \alpha u^{\alpha-1} Dv + u^\alpha D\varphi,$$

co kończy dowód lematu. ■

Uwaga 3.2.2.

Zauważmy, że obie całki we wzorze (2) po prawej stronie są skończone, choć nie widzimy tego we wzorze na S_α.

Całkowalność wyrażenia $A = \left||Du|^{p-2}(Du \cdot D\varphi)u^\alpha\right|$ wynika ze wzoru (3.4) oraz z faktu iż $D\varphi \in L^\infty,\ u^\alpha \in L^p_{loc}$.

Całkowalność wyrażenia $B = \left||Du|^{p-2}Du(Du^\alpha \varphi)\right|$ już wyjaśnialiśmy.

Mamy zatem:

$$|\alpha| \int |Du|^p u^{\alpha-1} \varphi dx \leqslant \int A(x)dx + \int B(x)dx$$

i funkcja $c = |Du|^p u^{\alpha-1}$ jest nieujemna. Zatem jest ona całkowalna.

W dowodzie twierdzenia 3.3.1 będziemy korzystali ze wzoru, uzasadnionego poniższym lematem.

Lemat 3.3. *Niech $R > 0$ oraz $0 \leqslant \xi_0 \in Lip(\mathbb{R}_+)$, $\xi \in Lip(\mathbb{R})$ będą zadane wzorami:*

$$\xi_0(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -t+2, & 1 \leqslant t \leqslant 2, \\ 0, & 2 \leqslant t, \end{cases} \qquad \xi(x) = \xi_0\left(\frac{|x|}{R}\right). \tag{3.6}$$

Zdefiniujmy φ formułą

$$\varphi := \xi^\lambda. \tag{3.7}$$

Wówczas, $\varphi \in Lip(\mathbb{R}^n)$[2] *i dla $\alpha, \beta > 0$ zachodzi następujący wzór:*

$$\int_{R<|x|<2R} \frac{|D\varphi|^\alpha}{\varphi^\beta} dx \leqslant \boldsymbol{C} R^{n-\alpha}, \tag{3.8}$$

z pewną stałą $\boldsymbol{C} = C(n, \alpha, \beta, \lambda) \in \mathbb{R}_+$, przy założeniu, że

$$\lambda(\beta - \alpha) + \alpha > -1, \quad \lambda \geqslant 1. \tag{3.9}$$

Dowód. ★

Zauważmy, że

$$|D\varphi(x)| = \frac{\lambda}{R} \xi^{\lambda-1}\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left|D\xi\left(\frac{x}{R}\right)\right|.$$

Zatem

$$\int_{R<|x|<2R} \frac{|D\varphi|^\alpha}{\varphi^\beta} dx = \frac{\lambda^\alpha}{R^\alpha} \int_{R<|x|<2R} \frac{\xi^{\alpha(\lambda-1)}\left(\frac{x}{R}\right) \cdot \left|D\xi\left(\frac{x}{R}\right)\right|^\alpha}{\left|\xi^\lambda\left(\frac{x}{R}\right)\right|^\beta} dx.$$

Podstawiając $y = \frac{x}{R}$ otrzymujemy dalej

$$\int_{R<|x|<2R} \frac{|D\varphi|^\alpha}{\varphi^\beta} dx = \frac{\lambda^\alpha}{R^\alpha} \int_{1<|x|<2} R^n |D\xi(y)| \left(\xi(y)\right)^{\alpha(\lambda-1)-\beta\lambda} dy$$

[2] Jeśli tylko $\lambda \geqslant 1$.

$$= R^{n-\alpha} \cdot \left(\lambda^{\alpha} \omega_{n-1} \int_1^2 \frac{|\xi_0'(t)|}{(\xi_0(t))^{\lambda(\beta-\alpha)+\alpha}} t^{n-1} dt \right),$$

gdzie ω_{n-1} to miara $n-1$-wymiarowej sfery.

Zauważmy, że wyrażenie w nawiasie nie zależy od R. Zatem o ile będzie skończone, będzie szukanym $\boldsymbol{C}$. Wystarczy oszacować całkę, występującą w tym wyrażeniu.

$$\left| \int_1^2 \frac{|D\xi_0(t)|}{(\xi_0(t))^{\lambda(\beta-\alpha)+\alpha}} t^{n-1} dt \right| \leqslant \left| \int_1^2 \frac{2^{n-1}}{(-t+2)^{\lambda(\beta-\alpha)+\alpha}} dt \right| =$$

$$= 2^{n-1} \left| \int_0^1 \frac{1}{v^{\lambda(\beta-\alpha)+\alpha}} dv \right| \leqslant 2^{n-1} \left| \frac{1}{\lambda(\alpha-\beta)-\alpha+1} \right|,$$

o ile $\lambda(\beta-\alpha)+\alpha > -1$.

■

3.3. Nieistnienie nierówności różniczkowych

Naszym celem jest przedstawienie pełnego dowodu następującego twierdzenia:

Twierdzenie 3.3.1 ([1], tw. 2.1)**.** *Jeśli*[3]

1. $0 < p-1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p}$ *oraz* $\alpha \in \left(max\{1-p, 1-\frac{q+1}{p}\}, 0 \right)$, *albo*

2. $0 < p-1 < q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ *oraz* $\alpha \in \left(max\{1-p, 1-\frac{q+1}{p}, 1-\frac{q}{p-1}\}, 0 \right)$,

wówczas zagadnienie

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant u^q & w \quad \mathbb{R}^n, \\ u \geqslant 0, u \not\equiv 0 & na \quad \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{3.10}$$

nie ma rozwiązań w klasie $S_\alpha = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : \ \Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \ u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\}$.

Dowód. ★

Dowód przeprowadzony zostanie w kolejnych etapach.

3.3.1. Wstępne ustalenia.

Niech φ spełnia warunki lematu 3.3. Zauważmy, że dla tak określonego φ zachodzi $\varphi \in W^{1,\infty}_0(\mathbb{R}^n)$ i $\varphi \geqslant 0$.

Niech $\alpha < 0$ będzie parametrem, który również później dobierzemy. Zauważamy, że ponieważ u^α jest funkcją całkowalną, to $u > 0$ poza pewnym zbiorem $Z \subseteq \mathbb{R}^n$ miary 0.[4]

Dla uproszczenia zapisu wprowadźmy następujące oznaczenia:

$$A(R) = \text{supp } \varphi = \{x : |x| \leqslant 2R\},$$

$$P(R) = \{x : R < |x| < 2R\}, \ R > 0.$$

[3] Autorzy pracy nie zakładają nic o α. Jest to błąd, gdyż w dowodzie w [1] korzysta się z wypisanych tu założeń.

[4] Autorzy uznali w dowodzie, że można założyć, że $u > 0$ wstawiając do wzoru (3.10) funkcję $u_\varepsilon = u + \varepsilon$ i rozważając $\varepsilon \downarrow 0$. To założenie jest jednak błędne, gdyż funkcja u_ε może nie spełniać nierówności (3.10).

Lematy pomocnicze

Będziemy potrzebowali uzasadnienia, że zachodzą poniższe implikacje.

Fakt 1. *Zachodzą:*

1. *Przy założeniach:* $(1 - p < \alpha$ *oraz* $p - 1 < q)$ *zachodzi* $\kappa = \frac{\alpha+q}{\alpha+p-1} > 1$.
2. *Przy założeniach:* $(1 - \frac{q+1}{p} < \alpha < 0$ *oraz* $0 < p - 1)$ *zachodzi* $a = \frac{\alpha+q}{(1-\alpha)(p-1)} > 1$.
3. *Niech* $\kappa', a', p > 1$. *Istnieje liczba* $\lambda = \lambda_{\kappa',a'} \geqslant 1$, *taka że dla* $\alpha_1 = p\kappa'$, $\beta_1 = (p-1)\kappa'$ *zachodzi* $\lambda(\beta_1 - \alpha_1) + \alpha_1 > -1$ *oraz dla* $\alpha_2 = pa'$, $\beta_2 = (p-1)a'$ *zachodzi* $\lambda(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2 > -1$.
4. *Przy założeniach:*
$$\kappa' = (1 - \frac{\alpha+p-1}{\alpha+q})^{-1} = \frac{\alpha+q}{q-p+1}, \ a = \frac{\alpha+q}{(1-\alpha)(p-1)} \text{ i } a' = \frac{a}{a-1}$$
zachodzi $\sigma = (n - p\kappa')\left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{ap}\right) + \left(\frac{n-a'p}{a'p}\right) = \frac{q(n-p)-n(p-1)}{q-p+1}$.
5. *Przy założeniach:* $1 - \frac{q}{p-1} < \alpha < 0$ *oraz* $0 < p - 1$ *zachodzi* $m = \frac{q}{(1-\alpha)(p-1)} > 1$.
6. *Przy założeniach:*
$$\kappa' = \frac{\alpha+q}{q-p+1}, \ q = \frac{n(p-1)}{n-p}, \ a = \frac{\alpha+q}{(1-\alpha)(p-1)}, \ \frac{1}{a}+\frac{1}{a'} = 1, \ 1-\frac{1}{m'} = \frac{(1-\alpha)(p-1)}{q},$$
$$\sigma = (n - p\kappa')\left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{ap}\right) + \left(\frac{n-a'p}{a'p}\right), \quad \tau = (n-p\kappa')\frac{p-1}{p} + \frac{n-pm'}{pm'}$$
mamy $\sigma = \tau = 0$.
7. *Przy założeniach:* $0 < p - 1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p}$ *zachodzi* $\sigma = \frac{q(n-p)-n(p-1)}{q-p+1} < 0$.

Dowód.

1. Istotnie, $\kappa = \frac{\alpha+q}{\alpha+p-1} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + q > \alpha + p - 1$.
2. Istotnie, $a = \frac{\alpha+q}{(1-\alpha)(p-1)} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\alpha + q > \alpha - p\alpha + p - 1$, co jest równoważne warunkowi, że $\alpha > 1 - \frac{q+1}{p}$.
3. Weźmy $\lambda = p$. Wówczas $\lambda(\beta_1 - \alpha_1) + \alpha_1 = p(-\kappa') + p\kappa' = 0 > -1$ i analogicznie $\lambda(\beta_2 - \alpha_2) + \alpha_2 = p(-a') + pa' = 0 > -1$.
4. Istotnie,
$$\sigma = (n-p\kappa')\left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{ap}\right)+\left(\frac{n-a'p}{a'p}\right) = n-\frac{n}{p}+\frac{n}{ap}-\frac{p\kappa'}{p}\left(p-1+\frac{1}{a}\right)+\frac{n}{p}\left(1-\frac{1}{a}\right)-1 =$$
$$= n - \kappa'(p-1) - 1 = n + \frac{(\alpha+q)(1-p-\frac{1}{a})}{q-p+1} - 1 =$$
$$= \frac{(n-1)(q-p+1) + (\alpha+q)(1-p) - (1-\alpha)(p-1)}{q-p+1} =$$
$$= \frac{q(n-1+1-p) - (p-1)(n-1+\alpha+1-\alpha)}{q-p+1} = \frac{q(n-p)-n(p-1)}{q-p+1}.$$

5. Istotnie, $a = \frac{q}{(1-\alpha)(p-1)} > 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{q}{p-1} > 1-\alpha$, co jest równoważne warunkowi, że $\alpha > 1 - \frac{q}{p-1}$.

6. $\sigma = \tau$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{n}{pm'} = \frac{n-p\kappa'}{pa} + \frac{n}{pa'}$, równoważnie: $\frac{n}{m'} = \frac{n-p\kappa'}{a} + \frac{n}{a'}$. Zauważmy, że $\frac{n-p\kappa'}{a} + \frac{n}{a'} = n\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\right) - \frac{p\kappa'}{a} = n - \frac{p\kappa'}{a}$. Wówczas warunek na $\sigma = \tau$ możemy zapisać następująco: $\frac{1}{m'} = 1 - \frac{p\kappa'}{an}$, co jest równoważne $\frac{p\kappa'}{an} = 1 - \frac{1}{m'} = \frac{(1-\alpha)(p-1)}{q}$. Zauważmy jednak, że $\frac{p\kappa'}{an} = \frac{p}{n} \cdot \frac{\alpha+q}{q-p+1} \cdot \frac{(1-\alpha)(p-1)}{\alpha+q}$. Wystarczy więc pokazać, że $\frac{p}{n(q-p+1)} = \frac{1}{q}$, czyli że $p = n\left(1 - \frac{p-1}{q}\right)$. Ale wobec $q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ otrzymujemy tożsamość $p = p$.

   Z powyższych rozważań i *punktu* 4. mamy $\tau = \sigma = \frac{q(n-p)-n(p-1)}{q-p+1}$, ale $q = \frac{n(p-1)}{n-p}$, zatem

$$\tau = \sigma = \frac{\frac{n(p-1)}{n-p}(n-p) - n(p-1)}{q-p+1} = \frac{n(p-1) - n(p-1)}{q-p+1} = 0.$$

7.

$$\sigma = \frac{q(n-p) - n(p-1)}{q-p+1} < \frac{\frac{n(p-1)}{n-p}(n-p) - n(p-1)}{q-p+1} = \frac{n(p-1) - n(p-1)}{q-p+1} = 0.$$

■

3.3.2. Przypadek $0 < p - 1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p}$.

Dowód tego przypadku przeprowadzimy w kolejnych krokach.

Krok 1. Szacowanie $\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\alpha}\varphi dx$.

Mnożąc (3.10) przez nieujemną funkcję $u^\alpha\varphi$ i korzystając z Lematu 3.2 otrzymujemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^{q+\alpha}\varphi dx = \int_{A(R)} u^{q+\alpha}\varphi dx \leqslant \alpha \int_{A(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx + \int_{P(R)} |Du|^{p-2} < Du, D\varphi > u^\alpha dx$$

$$\overset{Schwartz}{\leqslant} \alpha \int_{A(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx + \int_{P(R)} |Du|^{p-1}|D\varphi|u^\alpha dx,$$

zatem

$$\int_{A(R)} u^{q+\alpha}\varphi dx + |\alpha| \int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx \leqslant \int_{P(R)} |Du|^{p-1}|D\varphi|u^\alpha dx =: B. \tag{3.11}$$

Zauważmy, że stąd wynika, że funkcja $u^{q+\alpha}\varphi$ jest całkowalna. Ponieważ nierówność zachodzi dla dowolnego R, otrzymujemy $u^{q+\alpha} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Z nierówności Younga (3.3) dla[5]
$a = |D\varphi| \cdot \varphi^{-\frac{1}{p'}} \cdot u^{\frac{\alpha}{p}+\frac{1}{p'}}$, $b = |Du|^{p-1} \cdot \varphi^{\frac{1}{p'}} \cdot u^{\frac{\alpha-1}{p'}}$ oraz $\theta = \varepsilon^{-\frac{p}{p'}}$ otrzymujemy:

$$B = \int_{P(R)} |Du|^{p-1}\varphi^{-\frac{1}{p'}}|D\varphi|\varphi^{\frac{1}{p'}}u^\alpha dx \leqslant$$

$$\leqslant C_1(\varepsilon) \int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx + C_2(\varepsilon) \int_{P(R)} u^{\alpha+p-1}\frac{|D\varphi|^p}{\varphi^{p-1}} dx, \tag{3.12}$$

[5]Zauważmy, że w zbiorze $P(R)$ funkcja φ jest ściśle dodatnia, więc b jest dobrze określoną liczbą.

gdzie

$$C_1(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^p}{p'}, \quad C_2(\varepsilon) = \frac{1}{p\varepsilon^{p(p-1)}} \tag{3.13}$$

Po połączeniu (3.11) i (3.12) oraz podstawieniu

$$C_3(\varepsilon) = |\alpha| - \frac{\varepsilon^p}{p'} > 0, \quad \varepsilon \in (0, \sqrt[p]{-p'\alpha}) \tag{3.14}$$

nierówność (3.12) zamienia się w:

$$\int_{A(R)} u^{q+\alpha}\varphi dx + C_3(\varepsilon)\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx \leqslant C_2(\varepsilon)\int_{P(R)} u^{\alpha+p-1}\frac{|D\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}dx. \tag{3.15}$$

Wybierając $\kappa > 1$, takie że $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa'} = 1$ i stosując do prawej strony nierówność Younga (3.3) dla $a = u^{\alpha+p-1}\varphi^{\frac{1}{\kappa}}$, $b = |D\varphi|^p\varphi^{1-p-\frac{1}{\kappa}}$ oraz $\theta = \varepsilon^{p(p-1)}$ otrzymujemy:

$$\int_{A(R)} u^{q+\alpha}\varphi dx + C_3(\varepsilon)\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx \leqslant C_4(\varepsilon)\int_{P(R)} u^{(\alpha+p-1)\kappa}\varphi dx + C_5(\varepsilon)\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx, \tag{3.16}$$

gdzie

$$C_4(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{p(p-1)\kappa}}{\kappa} = \frac{\varepsilon^{(1-p)p-(1-p)p\kappa}}{p\kappa} = \frac{\varepsilon^{(1-p)p(1-\kappa)}}{p\kappa},$$
$$C_5(\varepsilon) = C_2(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{p(1-p)\kappa'}}{\kappa'} = \frac{\varepsilon^{(1-p)p+(1-p)p\kappa'}}{p\kappa'} = \frac{\varepsilon^{(1-p)p(1+\kappa')}}{p\kappa'}. \tag{3.17}$$

Obie te stałe są większe od zera, gdyż $C_2(\varepsilon), \varepsilon, \kappa > 0$.

Stosując Fakt 1, punkt 1, możemy wybrać $\kappa = \frac{\alpha+q}{\alpha+p-1}$. Wówczas nierówność (3.16) możemy zapisać następująco:

$$C_6(\varepsilon)\int_{A(R)} u^{q+\alpha}\varphi dx + C_3(\varepsilon)\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx \leqslant C_5(\varepsilon)\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx, \tag{3.18}$$

gdzie

$$C_6(\varepsilon) = 1 - C_4(\varepsilon) = 1 - \frac{\varepsilon^{p(1-p)\left(1-\frac{\alpha+q}{\alpha+p-1}\right)}}{\frac{p(\alpha+q)}{\alpha+p-1}}. \tag{3.19}$$

Możemy wybrać takie ε, by $C_6(\varepsilon) > 0$. [6]

Krok 2. Szacowanie $\int_{\mathbb{R}^n} u^q\varphi dx$.

Mnożąc (3.10) przez φ i odcałkowując przez części otrzymujemy:

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^q\varphi dx = \int_{A(R)} u^q\varphi dx \leqslant \int_{P(R)} |Du|^{p-2} < Du, D\varphi > dx \overset{Schwartz}{\leqslant} \int_{P(R)} |Du|^{p-1}|D\varphi|dx$$

$$= \int_{P(R)} |Du|^{p-1}u^{\frac{(\alpha-1)(p-1)}{p}}\varphi^{1-\frac{1}{p}}u^{\frac{(1-\alpha)(p-1)}{p}}\varphi^{\frac{1}{p}-1}|D\varphi|dx$$

[6] Zauważmy, że wówczas wykładnik ε jest dodatni. Zatem dla dostatecznie małych ε stała $C_6(\varepsilon)$ może być dowolnie bliska jedynki.

$$\overset{Holder}{\leqslant} \left(\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} u^{(1-\alpha)(p-1)}\frac{|D\varphi|^p}{\varphi^{p-1}}dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{3.20}$$

Biorąc $a > 1$, takie że $(\frac{1}{a} + \frac{1}{a'} = 1)$ i stosując nierówność Höldera dla ostatniego wyrażenia z (3.20), wyrażenie $\int u^q\varphi dx$ może być oszacowane następująco:

$$\int_{A(R)} u^q\varphi dx \leqslant \left(\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} u^{a(1-\alpha)(p-1)}\varphi dx\right)^{\frac{1}{ap}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{pa'}}{\varphi^{(p-1)a'}}dx\right)^{\frac{1}{pa'}}. \tag{3.21}$$

Stosując Fakt 1, punkt 2, możemy wybrać a takie, że $a(1-\alpha)(p-1) = q+\alpha$. Połączmy (3.21) oraz (3.18). Wówczas

$$\int_{A(R)} u^q\varphi dx \leqslant \overline{C}_\varepsilon \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx\right)^{\frac{1}{ap}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{pa'}}{\varphi^{(p-1)a'}}dx\right)^{\frac{1}{a'p}} =$$

$$= \overline{C}_\varepsilon \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx\right)^{\frac{p-1}{p}+\frac{1}{ap}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{pa'}}{\varphi^{(p-1)a'}}dx\right)^{\frac{1}{a'p}}, \tag{3.22}$$

gdzie $\overline{C}_\varepsilon > 0$.

Krok 3. Koniec dowodu w przypadku $0 < p-1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p}$.

Korzystając z lematu 3.3 w (3.22) do wyrażeń: $I = \int \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}}dx$ i $II = \int \frac{|D\varphi|^{pa'}}{\varphi^{(p-1)a'}}dx$ oraz dobierając $\lambda > 1$ w oparciu o Fakt 1, punkt 3, otrzymujemy:

$$\int_{|x|<R} u^q(x)dx \leqslant \int_{A(R)} u^q\varphi dx \leqslant \widetilde{C}\left(R^{n-p\cdot\kappa'}\right)^{\frac{p-1}{p}+\frac{1}{ap}} \left(R^{n-p\cdot a'}\right)^{\frac{1}{a'p}} = \widetilde{C}R^\sigma, \tag{3.23}$$

gdzie $\sigma = (n-p\kappa')\left(\frac{p-1}{p} + \frac{1}{ap}\right) + \left(\frac{n-a'p}{a'p}\right)$. Biorąc pod uwagę nasze wybory κ' oraz a i stosując Fakt 1, punkt 4, otrzymujemy:

$$\sigma = \frac{q(n-p) - n(p-1)}{q-p+1}. \tag{3.24}$$

Z Faktu 1, punkt 7, wiemy, że $\sigma < 0$. Wówczas nierówność (3.23) implikuje

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x)dx = 0$$

To zaś stoi w sprzeczności z faktem, iż $u > 0$ prawie wszędzie.

Krok 4. Podsumowanie warunków na parametry

W analizie tego przypadku korzystaliśmy z następujących warunków na parametry:

1. $\kappa > 1$ (Fakt 1, punkt 1),
2. $a > 1$ (Fakt 1, punkt 2),
3. $\sigma < 0$ (Fakt 1, punkt 7).

Uwzględniając wszystkie założenia punktów 1, 2 i 7 z Faktu 1, otrzymujemy następujący warunek wiążący parametry:

$$0 < p-1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p} \quad \text{oraz} \quad \alpha \in \left(max\{1-p, 1-\frac{q+1}{p}\}, 0\right).$$

3.3.3. Przypadek krytyczny $0 < p - 1 < q = \frac{n(p-1)}{n-p}$.

Dowód tego przypadku przeprowadzimy w kolejnych krokach.

W tym przypadku określone w (3.24) $\sigma = 0$ (Fakt 1, punkt 6).

Krok 1. Szacowanie $\int_{|x|<R} u^q dx$.

Z naszego wyboru φ (parametr λ dobierzemy później) oraz ze wzoru (3.20) mamy:

$$\int_{|x|<R} u^q(x)\varphi dx \leqslant \int_{P(R)} |Du|^{p-1}|D\varphi| dx$$

$$\leqslant \left(\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} u^{(1-\alpha)(p-1)} \frac{|D\varphi|^p}{\varphi^{p-1}} dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leqslant \left(\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} u^{m(1-\alpha)(p-1)}\varphi dx\right)^{\frac{1}{mp}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{pm'}}{\varphi^{(p-1)m'}} dx\right)^{\frac{1}{pm'}},$$

gdzie $m > 1$ i $\frac{1}{m} + \frac{1}{m'} = 1$.

Stosując Fakt 1, punkt 5, możemy wybrać $m = \frac{q}{(1-\alpha)(p-1)}$. Zauważmy, że również w przypadku krytycznym, gdy $q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ spełnione jest założenie $\kappa = \frac{\alpha+q}{\alpha+p-1} > 1$ (Fakt 1, punkt 1). Możemy zatem zastosować wzór (3.18) do wyrażenia: $\int_{P(R)} |Du|^p u^{\alpha-1}\varphi dx$. To daje:

$$\int_{|x|<R} u^q(x) dx \leqslant C \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{p\kappa'}}{\varphi^{(p-1)\kappa'}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{P(R)} \frac{|D\varphi|^{pm'}}{\varphi^{(p-1)m'}} dx\right)^{\frac{1}{pm'}} \left(\int_{P(R)} u^q dx\right)^{\frac{1}{pm}}. \tag{3.25}$$

Krok 2. Koniec dowodu w przypadku $0 < p - 1 < q = \frac{n(p-1)}{n-p}$.

Po zamianie zmiennych otrzymujemy:

$$\int_{|x|<R} u^q(x) dx \leqslant C_0 R^\tau \left(\int_{P(R)} u^q dx\right)^{\frac{1}{pm}}, \tag{3.26}$$

gdzie

$$\tau = (n - p\kappa')\frac{p-1}{p} + \frac{n - pm'}{pm'} = 0.$$

Istotnie, stosując Fakt 1, punkt 3 do trójki (κ', m', p) zamiast (κ', a', p) zauważamy, że istnieje $\lambda > 1$, takie, że dla obu par (α_1, β_1) i (α_3, β_3), gdzie $\alpha_1 = p\kappa'$, $\beta_1 = (p-1)\kappa'$, $\alpha_3 = pm'$, $\beta_3 = (p-1)m'$, można zastosować Lemat 3.3 z tym samym parametrem λ. To wyjaśnia nierówność (3.26).

Do momentu wyprowadzenia nierówności (3.23) nie korzystaliśmy z założeń na σ. W szczególności przy naszych założeniach (3.23) jest spełnione. Z Faktu 1, punkt 6 mamy $\sigma = \tau = 0$, stąd

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^q(x) dx < \infty.$$

Nierówność (3.26) implikuje, że istnieje taki ciąg $\{R_k\}$, że $R_k \to \infty$ oraz

$$\lim_{k\to\infty} \int_{|x|<R_k} u^q dx = 0,$$

co kończy dowód.

Krok 3. Podsumowanie warunków na parametry

W analizie tego przypadku korzystaliśmy z następujących warunków na parametry:

1. $\kappa > 1$ (Fakt 1, punkt 1),
2. $m > 1$ (Fakt 1, punkt 5),
3. $\sigma = \tau = 0$ (Fakt 1, punkt 6),
4. $a > 1$ (Fakt 1, punkt 2; warunek potrzebny do dowodu punktu 6).

Uwzględniając wszystkie założenia punktów 1, 2, 5 i 6 z Faktu 1, otrzymujemy następujący warunek wiążący parametry:

$$0 < p - 1 < q = \frac{n(p-1)}{n-p} \quad \text{oraz} \quad \alpha \in \left(max\{1-p, 1 - \frac{q+1}{p}, 1 - \frac{q}{p-1}\}, 0 \right).$$

■

Uwaga 3.3.1.

★ Autorzy pracy [1] rozpatrzyli również przypadek, gdy $0 \leqslant q \leqslant p-1$, $p > 1$ i $n \geqslant 1$. Ich dowód opierał się jednak na sprzecznych założeniach wiążących parametry.

Dowód. W dowodzie z pracy [1] w tym przypadku autorzy korzystają z faktów, iż

$$\kappa = \frac{\alpha + q}{\alpha + p - 1} > 1 \quad \text{oraz} \quad a = \frac{\alpha + q}{(1-\alpha)(p-1)} > 1.$$

Jeżeli $\kappa > 1$ oraz $0 \leqslant q \leqslant p - 1$, to $\alpha < 1 - p$.
Jeżeli $a > 1$, to $q + \alpha > p - 1 - \alpha p + \alpha$.
Uwzględniając $0 \leqslant q < p - 1$ i $\alpha < 1 - p$ mamy:

$$p - 1 \geqslant q > p - 1 - \alpha p > p - 1 - (1-p)p = (p-1)(p+1).$$

Dzieląc stronami przez $p - 1 > 0$ mamy $1 > p + 1$, czyli

$$p < 0,$$

co jest sprzeczne z założeniem, że $p > 1$. ■

Rozdział 4

Podsumowanie

Przegląd metod rozpoczynamy od dowodu twierdzenia o nieistnieniu w klasie $C^2(\overline{U})$ nietrywialnych rozwiązań zagadnienia:

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-1}u & w \quad U, \\ u = 0 & na \quad \partial U, \end{cases}$$

gdzie $\frac{n-2}{2} - \frac{n}{q+1} > 0$, a U jest obszarem gwiaździstym względem punktu 0, którego brzeg jest klasy C^1.

Następnie pokazujemy uogólnienie powyższego twierdzenia. Dowodzimy nieistnienie w klasie $C^2(\overline{U})$ nietrywialnych rozwiązań zagadnienia:

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda|u|^{q-1}u & w \quad U, \\ u = 0 & na \quad \partial U, \end{cases}$$

gdzie $\left(\frac{n}{p} - \frac{n}{q+1} - 1\right) > 0$ oraz $\lambda > 0$.

Dowody obu powyższych twierdzeń polegają na odcałkowaniu wyjściowego równania po pomnożeniu przez 2 różne funkcje: $x \cdot Du$ oraz u, co prowadzi do sprzecznych tożsamości.

Zajmujemy się również nieistnieniem rozwiązań w klasie

$$S_\alpha = \{u \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n) : \quad \Delta_p u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n), \quad u^\alpha \in W^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)\},$$

dla następującego zagadnienia:

$$\begin{cases} -\Delta_p u \geqslant u^q & w \quad \mathbb{R}^n, \\ u \geqslant 0, u \not\equiv 0 & na \quad \mathbb{R}^n, \end{cases}$$

przy następujących założeniach na parametry:

1. $0 < p - 1 < q < \frac{n(p-1)}{n-p}$ oraz $\alpha \in \left(max\{1-p, 1-\frac{q+1}{p}\}, 0\right)$, albo
2. $0 < p - 1 < q = \frac{n(p-1)}{n-p}$ oraz $\alpha \in \left(max\{1-p, 1-\frac{q+1}{p}, 1-\frac{q}{p-1}\}, 0\right)$.

W dowodzie, poza całkowaniem przez części, wykorzystujemy wielokrotnie nierówności Höldera i Younga.

Bibliografia

[1] E. Mitidieri, S. I. Pohozaev, *Nonexistence of Positive Solutions for Quasilinear Elliptic Problems on* $\mathbb{R}^n$, Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Vol. 227, 1999, 1–32.

[2] L. C. Evans, *Równania różniczkowe cząstkowe*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2004.

[3] V. G. Mazja, *Sobolev spaces*, Springer-Verlag, New York, 1985.