Wymiary wykresów funkcji ciągłych

Mateusz Szutko

16.04.2020

Problem linii brzegowej

"Coastline Paradox" mówi o tym, że długość zmierzonej linii brzegowej zależy od miarki, której użyjemy do pomiarów. Okazuje się, że im krótsza miarka tym większy jest wynik pomiaru i dąży do nieskończoności gdy długość miarki dąży do zera.

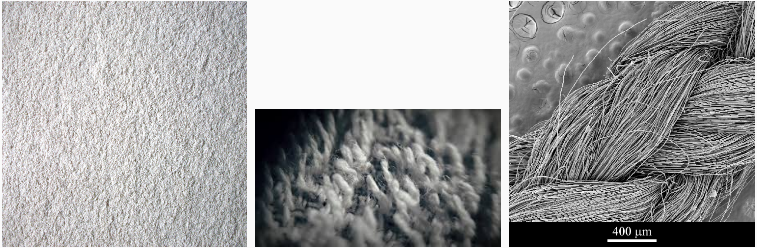
(a) Najdłuższa miarka **(b)** Krótsza miarka **(c)** Najkrótsza miarka

Figure 1: Wartość pomiaru w zależności od długości miarki dla linii brzegowej Wielkiej Brytanii

Powierzchnia dywanu

Podobny problem napotykamy licząc powierzchnię dywanu. Patrząc na niego z daleka można po prostu użyć miarki i zwykłego wzoru na pole powierzchni. Gdy spojrzymy na niego z bliska, zobaczymy małe frędzle, które wypełniają jego powierzchnię. Licząc gęstość ich występowania np. na $1cm^2$ można oszacować "całą" powierzchnię dywanu. Jednak owe frędzle składają się z nici, a te nici z włókien, a każde włókno ma swoją strukturę. Gdy takie rozważanie doprowadzi już nas na poziom atomów, liczenie powierzchni staje się co najmniej kłopotliwe, mimo tego trudno wybrać "bardziej słuszną" skalę, którą w ogólności można by stosować i trzeba po prostu korzystać z takiej, która jest nam na dany moment potrzzebna.

Powierzchnia dywanu

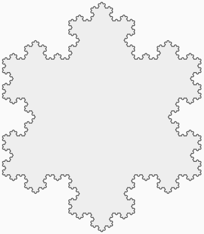


(a) Dywan z daleka **(b)** Dywan z bliska **(c)** włókno pod mikroskopem

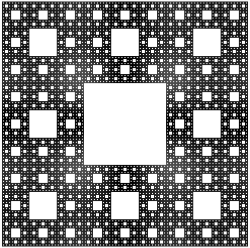
Figure 2: W zależności od tego jak patrzymy na dywan, wynik pomiaru powierzchni będzie się różnić

Nie wszystkie figury geometryczne mają "sensowne" miary

(a) Zbiór Cantora – długość 0



(b) Płatek Kocha – nieskończony obwód



(c) Dywan Sierpińskiego – pole 0

Figure 3

Wymiar fraktalny

Jeżeli weźmiemy na przykład jednostkowy odcinek o wymiarze 1 i przeskalujemy dwukrotnie, to jego długość wzrośnie dwukrotnie i otrzymamy dwie kopie oryginalnego zbioru.
Jednostkowy kwadrat o wymiarze 2, którego każdy bok wydłużymy dwukrotnie ma pole czterokrotnie większe niż oryginał i otrzymamy 4 kopie
Analogicznie będzie dla kostki jednostkowej o wymiarze 3, zwiększając dwukrotnie długość każdego boku, objętość wzrośnie 2^3 razy i tyleż samo kopii pierwotnej kostki powstanie.

Wymiar fraktalny

Obserwując zbiór Cantora i to jak się zachowuje po przeskalowaniu, można zauważyć że dostajemy dwie jego kopie po trzykrotnym wydłużeniu całego zbioru. Gdyby zatem myśleć o jakimś pojęciu wymiaru ogólniejszym niż to, które sprowadza się do liczb naturalnych, to można odnieść wrażenie że "wymiar" zbioru Cantora to jakaś liczba między 0 a 1

Można wyprowadzić intuicyjną definicję wymiaru fraktalnego, która będzie tyczyła się zbiorów samopodobnych, czyli składających się z figur podobnych do całego zbioru z pewną skalą.

dim_f – wymiar fraktalny

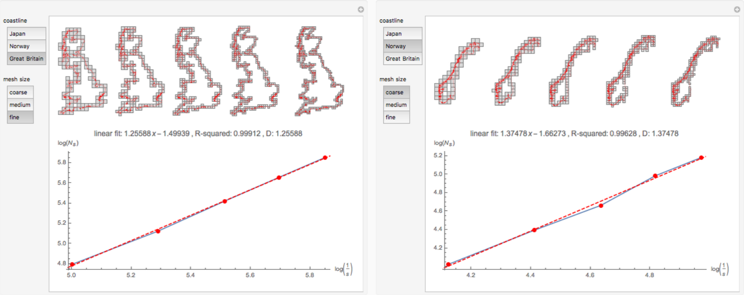
N – Liczka kopii pierwotnego zbioru zbioru po przeskalowaniu

k – współczynnik skalowania

$$\mathrm{dim}_f = \frac{\log(N)}{\log(k)}$$

Wymiar pudełkowy

Wymiar fraktalny trudno jest jednak odnieść do problemów typu paradoks linii brzegowej, które zwykle nie dotyczą samopodobnych zbiorów. Nie mniej jednak używając miarek i skalowania można intuicyjnie wyprowadzić pojęcie wymiaru pudełkowego.
W $\mathbb{R}^n$ można zdefiniować siatkę o ustalonym boku (np. kartka w kratkę w zeszycie) i obliczyć ilość "kratek", z którymi zbiór $A \subset \mathbb{R}^n$ ma niepuste przecięcie. Po zagęszczeniu siatki można się spodziewać że liczba "kratek" wzrośnie w zależności od tego jak bardzo zagęściliśmy siatkę i wymiaru zbioru A, podobnie jak w wymiarze fraktalnym. Można użyć tej intuicji do numerycznego szacowania wymiaru pudełkowego wybrzeża



(a) (b)

Figure 4: Norwegia i Wielka Brytania – im wyższy wymiar pudełkowy tym bardziej skomplikowana linia brzegowa

Wymiar pudełkowy - definicja ścisła

Niech F będzie niepustym podzbiorem $\mathbb{R}^n n \in \mathbb{N}$ a $N_\delta(F)$ oznacza najmniejszą liczbę zbiorów o promieniu nie większym niż δ Wymiar dolny i górny pudełkowy są zdefiniowane odpowiednio jako

$$\underline{\dim_B} = \liminf_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

$$\overline{\dim_B} = \limsup_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

Gdy obie te granice są równe, wtedy jako wymiar pudełkowy zbioru F oznaczamy granicę

$$\dim_B = \lim_{\delta\to 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log\delta}$$

Nie jest to jedyna definicja, istnieją inne równoważne. W ogólności nie dla każdego zbioru można zdefiniować wymiar pudełkowy, jednak wymiar dolny i górny danego zbioru zawsze istnieją.

Wymiar pudełkowy – twierdzenia

Wymiar dolny pudełkowy wykresu typowej (w sensie Baire'a) funkcji ze zbioru funkcji ciągłych jednostajnie z normą supremum jest tak mały jak to tylko możliwe, czyli równy dolnemu wymiarowi pudełkowemu zbioru, na którym określona jest ta funkcja.

Podobnie wymiar górny pudełkowy takiej samej funkcji jest tak duży jak to tylko możliwe, czyli równy górnemu wymiarowi pudełkowemu zbioru na którym jest określona ta funkcja powiększonemu o 1.

Wymiar Hausdorffa

Miara zewnetrzna Hausdorffa Niech $s > 0, (X, d)$ - Przestrzeń metryczna. Dla każdego $E \subset X$

$$H^s_\delta(E) := inf(\sum_{i=1}^{\infty} diam(A_i)^s)$$

Jest to infimum po rodzinach zbiorów A_i które pokrywają zbiór E i zawierają zbiory o średnicy mniejszej bądź równej δ

Miara Hausdorffa

$$H^s(E) := \lim_{\delta \to 0} H^s_\delta(E)$$

Wymiar Hausdorffa

$$dim_H := inf(s : H^s(E) = 0) = sup(s : H^s(E) = \infty)$$

Można pokazać że zbiór funkcji o wymiarze Hausdorffa 1 jest gęstym G_δ podzbiorem zbioru funkcji ciągłych na $[0, 1]$

Zgadza się to z faktem, że wymiar dolny pudełkowy wykresu typowej funkcji jest równy jeden, gdyż jest on górnym ograniczeniem wymiaru Hausdorffa.

Funkcje ciągłe nieróżniczkowalne w żadnym punkcie

Zarówno wymiar Hausdorffa jak i pudełkowy funkcji różniczkowalnych jest równy ich wymiarowi topologicznemu.
Korzystając z metod topologicznych można pokazać, że zbiór funkcji ciągłych, nieróżniczkowalnych w żadnym punkcie jest gęstym G_δ podzbiorem przestrzeni funkcji ciągłych na $[0, 1]$ z metryką supremum.