Wykład 6. P-nie Musielaka-Orlicza

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$

Def. Słabą N-funkcją nazywamy f-cję $M: \Omega \times [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$, t. że:

- M jest Carathéodory'ego (mierzalna ze względu na pierwszą współrzędną i ciągła ze względu na drugą)
- $M(x, 0) = 0$ i $M(x, \cdot)$ jest wypukła dla p.w. $x \in \Omega$
- istnieją f-cje wypukłe $m_1, m_2 : [0, \infty) \to [0, \infty)$ $m_1(0) = 0$, $m_1(s) > 0$ dla $s > 0$ i dla p.w. $x \in \Omega$

$$m_1(t) \leq M(x, t) \leq m_2(t)$$

Def. Mówimy, że M - słaba N-funkcja ma własność podwajania (jest Δ_2; $M \in \Delta_2$) jeśli dla pewnej stałej c i całkowalnej $h: \Omega \to [0, \infty)$ zachodzi:

$$M(x, 2t) \leq c M(x, t) + h(x) \quad \text{dla p.w. } x \in \Omega \text{ dla } t \in [0, \infty)$$

Przykłady:

- $M(x, t) = t^p$, $p \geq 1$
- $M(x, t) = t^{p(x)}$, $1 \leq p \in L^{\infty}$
- $M(x, t) = t^p + a(x) t^q$, $1 \leq p < q$, $0 \leq a \in L^{\infty}$

✓ $M(x,2t) = 2^{p(x)} t^{p(x)} \le 2^{\|p\|_\infty} t^{p(x)}$

- $M(x,t) = \exp(t) - 1$

$M(x,2t) = \exp(2t) - 1$

$$\frac{M(x,2t)}{\exp t} = \underset{\downarrow \atop \infty}{\exp(t)} - \underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{\exp(t)}}$$

UWAGA. Od teraz $M \in \Delta_2$

Def. Modularem nazywamy funkcjonał $\varrho_{M;\Omega}$ na funkcjach mierzalnych $f: \Omega \to \mathbb{R}^n$ zdefiniowany wzorem

$$\varrho_{M;\Omega}(f) := \int_\Omega M(x, |f(x)|)\, dx$$

Def. Przestrzenią Musielaka-Orlicza $L_M(\Omega;\mathbb{R}^n)$ nazywamy przestrzeń

$$\{f: \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ - mierzalna},\ \varrho_{M;\Omega}(f) < \infty\}$$

Def. Ustalamy normę Luxemburga na L_M:

$$\|f\|_{L_M} := \inf\{\lambda > 0 \mid \varrho_{M;\Omega}(\tfrac{f}{\lambda}) < 1\}$$

Uwaga. $\|f_n - f\|_{L_M} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \iff \varrho_{M;\Omega}(f - f_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Def. Przestrzenią M-Θ-Sobolewa nazywamy
$$V^1 L_M(\Omega) := \{ v \in W^{1,1}(\Omega) : \nabla v \in L_M(\Omega; \mathbb{R}^n)\}$$
gdzie ∇ - słaba pochodna, z normą
$$\|v\|_{V^1 L_M(\Omega)} := \|v\|_{L^1} + \|\nabla v\|_{L_M}$$
Analogicznie definiujemy V^1_0

WARUNEK (B) (BALANCE CONDITION)

Istnieje C, t. że dla wszystkich $x, y \in \Omega$, $t \in [0, \infty)$:
$$M(x,t) \leq C(M(y,t)+1), \text{ gdy } |x-y|^{-1} \geq t$$

PRZYKŁADY.

- $M(x,t) = M(t) \rightarrow M$ spełnia (B)
- $M(x,t) = t^{p(x)}$, to M spełnia (B) o ile istnieje c, t. że
$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{c}{\log\left|\frac{1}{x-y}\right|}$$
variable exponent

(p jest log - Hölderowska)

double-phase

- $M(x,t) = t^p + a(x) t^q$, wtedy M spełnia (B) o ile $a \in C^{0,\alpha}(\Omega)$ i $q \leq p + \alpha$

Tw. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ - otw., ogr. z dost. regularnym brzegiem, M jest słabą N-funkcją, M spełnia (B). Wówczas $\forall u \in V^1_0 L_M(\Omega)$ istnieje

$\{v_\delta\}_{\delta>0} \subseteq C_c^\infty(\Omega)$, t. że $u_\delta \to u$ silnie w L^1, wg miary i $\nabla v_\delta \to \nabla v$ w L_M.

D-d: $\varrho \in C_c^\infty(B(0,1))$, $\int_{B(0,1)} \varrho(x)\,dx = 1$

$\varrho: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – klasyczne jądro aproksymacji; definiujemy

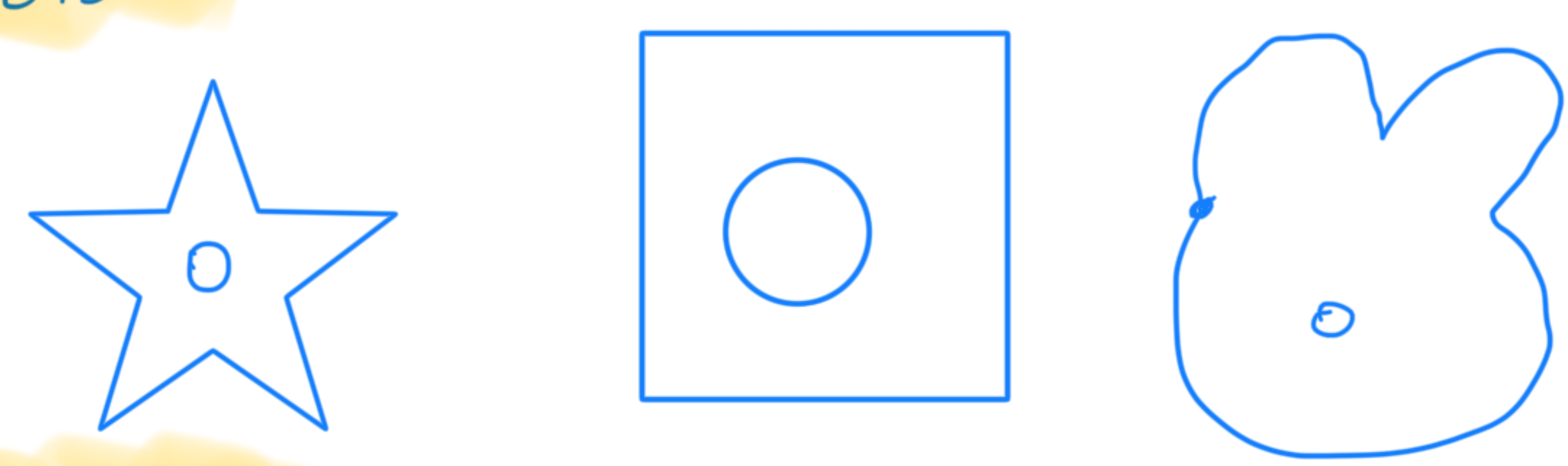
$$\varrho_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-n} \varrho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \text{ dla } \varepsilon > 0.$$

$v * \varrho_\varepsilon$ – gładkie, $v * \varrho_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \to 0} u$ w $L^1_{R>0}$.

Ω – gwiaździsty względem pewnej kuli $(0,R)$, t.j.:

$\forall x \in B(0,R)\ \forall y \in \Omega\ \ \underset{\text{odcinek}}{[x,y]} \subseteq \Omega$

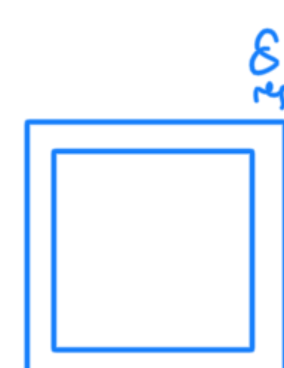
PRZYKŁADY:



WRACAMY

Niech $k_\delta = 1 - \frac{\delta}{R}$, niech $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ będzie mierzalna, $\operatorname{supp} f \subset \Omega$.

Definiujemy: $S_\delta f(x) := \int_\Omega \varrho_\delta(x-y) f\left(\frac{y}{k_\delta}\right) dy$



ddm δ $S_\delta f \in C_0^\infty(\Omega)$,

$S_\delta f \longrightarrow f$ w L^1, i jeśli $f \in W^{1,1}(\Omega)$,

to $\nabla S_\delta f = (\nabla \varrho_\delta) * f\left(\frac{\cdot}{k_\delta}\right)$

1) $M(x,t) = M(t)$, $f \in V_0^1$

$$M(\nabla S_\delta f(x)) \leq M\left(\frac{1}{k_\delta} \int_{B(0,\delta)} \varrho_\delta(y) \left|\nabla f\left(\frac{x-y}{k_\delta}\right)\right| dy\right)$$

$$\leq C \underbrace{\int_{B(0,\delta)} \varrho_\delta(y) M\left(\left|\nabla f\left(\frac{x-y}{k_\delta}\right)\right|\right) dy}_{S_\delta(M \circ |\nabla f|)} = C S_\delta(M \circ |\nabla f|)$$

$$S_\delta(M \circ |\nabla f|) \longrightarrow M(|\nabla f|) \text{ w } L^1$$

$$M(|\nabla S_\delta f|) \longrightarrow M(\nabla f) \text{ punktowo}$$

na podciągu

Tw. (Vitali) NWSR $|\Omega| < \infty$, $f_n \to f$ w mierze

- $f_n \longrightarrow f$ w L^1
- $\{f_n\}$ jest jednostajnie całkowalny

$$\forall \varepsilon \, \exists \delta \, \forall A \subseteq \Omega \; |A| < \delta \; \forall n \int_A |f_n| < \varepsilon$$

Wniosek: $f_n \geq 0$

$f_n \longrightarrow f$ w mierze oraz $\exists \, g_n \to g$ w L^1, t. że $f_n \leq g_n$; wówczas $f_n \longrightarrow f$ w L^1

Z wniosku

z wniosku

$f_\delta := M(|\nabla S_\delta f|) \longrightarrow M(\nabla f)$ punktowo,

$g_\delta := C S_\delta(M(|\nabla f|))$, z wniosku

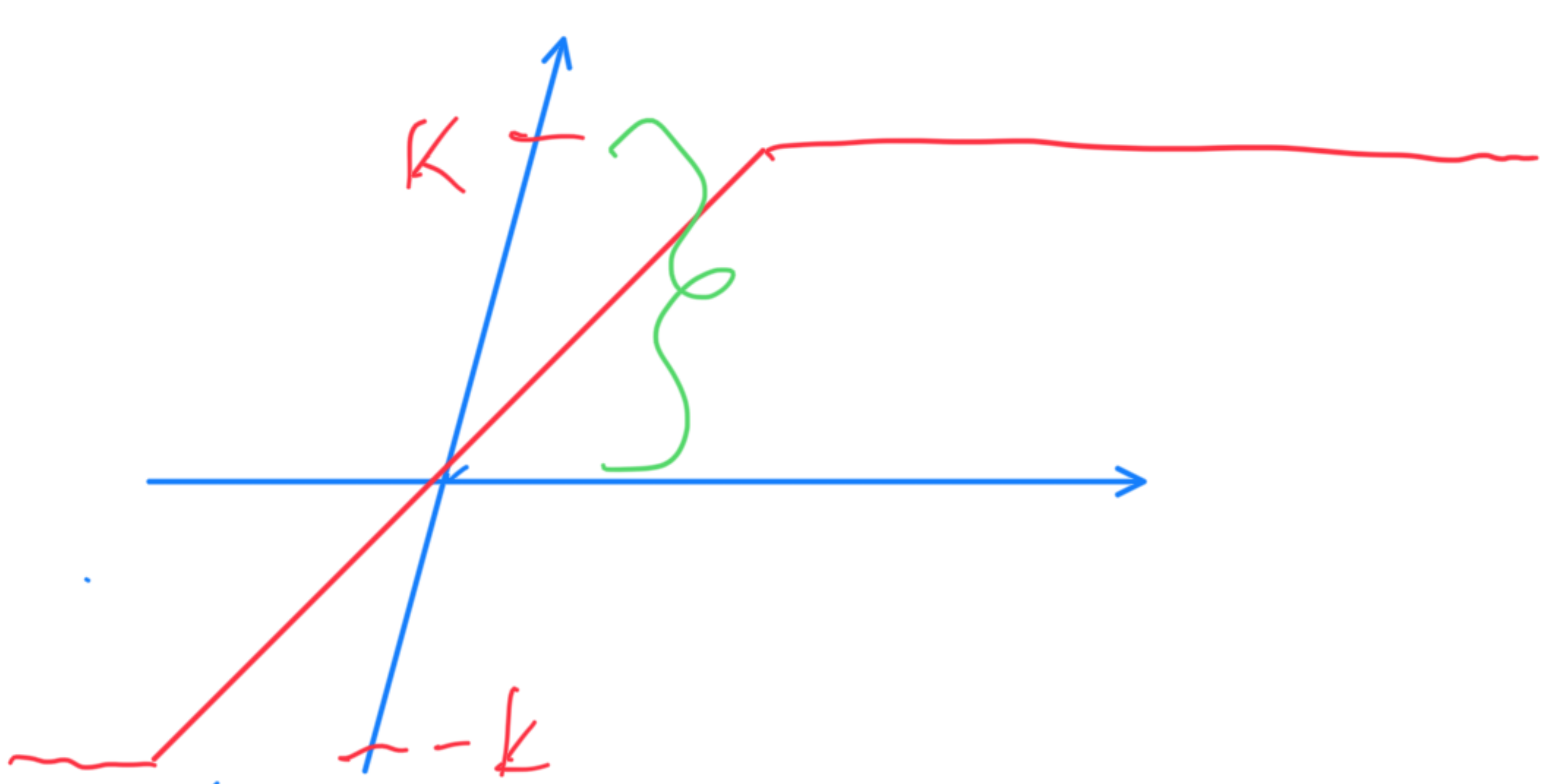
$$M(|\nabla S_\delta f - \nabla f|) \longrightarrow 0 \text{ w } L^1$$

2) General case

$M \in \Delta_2$, M spełnia (B)

Lemat 1

Niech $T_k(x) = \min\{k, \max\{-k, x\}\}$
dla $k > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $u \in W^{1,1}_0$, $\nabla u \in L_M$



Wtedy $T_k u \longrightarrow u$ w $W^{1,1}_0$ i $\nabla T_k u \xrightarrow{L_M} \nabla u$.

$V^1_0 L_M \cap L^\infty$ jest gęste w $V^1_0 L_M$

z nierówności Younga dla splotów

$$\|f*g\|_{L^\infty} \le \|f\|_{L^\infty}\|g\|_{L^1}$$

$$\|f*g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^q}\|g\|_{L^r}$$

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{q}=\frac{1}{p}+1$$

$$\|\nabla S_\delta u\|_{L^\infty} \le \|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho_\delta\|_{L^1} = \frac{1}{\delta}\|u\|_{L^\infty}\|\nabla\rho\|_{L^1}$$

$$\nabla\rho_\delta(x)=\delta^{-(n+1)}\nabla\rho\left(\frac{x}{\delta}\right)$$

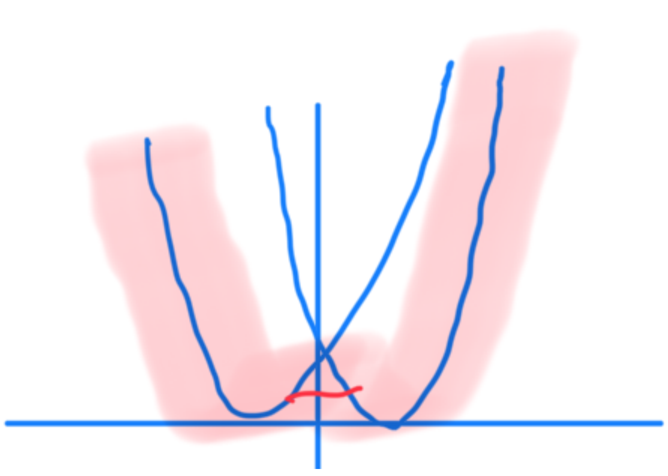
$$\int|\nabla\rho_\delta(x)|\,dx=\delta^{-(n+1)}\int\left|\nabla\rho\left(\frac{x}{\delta}\right)\right|dx = \left|\begin{matrix} y=\frac{x}{\delta} \\ y=\delta^{n}\end{matrix}\right| =$$

$$=\delta^{-1}\int|\nabla\rho(y)|\,dy \qquad \checkmark$$

M spełnia (B), niech $J>0$, $\exists\, C_J>0$, t. że

$$M(x,|(\nabla S_\delta u)(x)|)\le C_J \operatorname*{ess\,inf}_{y\in B(x,J\delta)} M(y,|(\nabla S_\delta u)(x)|)+1$$

$$|x-y|\le \frac{1}{|(\nabla S_\delta u)(x)|}$$



Lemat 2

Niech $M: \Omega \times [0,\infty) \to [0,\infty)$ będzie N-funkcją, μ - miara probabilistyczna, f jest μ-całkowalna na Ω. Wtedy:

$$\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} M\left(x, \frac{1}{2}\int_\Omega |f|\,d\mu\right) \leq \int_\Omega \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} M(x,|f|)\,d\mu$$

D-d:

Niech $\bar{M}(t) = \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} M(x,t)$

$t \longmapsto \frac{\bar{M}(t)}{t}$ jest niemalejąca (prop. Adama)

$$\frac{\bar{M}(t)}{t} \geq \frac{\bar{M}(s)}{s} \quad \text{dla } t \geq s$$

$$\bar{M}(t) - \bar{M}(s) \geq \left(\frac{t-s}{s}\right)\bar{M}(s)$$

$$\bar{M}(t) \geq \left(\frac{t-s}{s}\right)\bar{M}(s)$$

$t \longmapsto \left(\frac{t}{s} - 1\right)\bar{M}(s)$ jest wypukła

Niech $\bar{M}^{**}$ - największa wypukła, t. że

$\bar{M}(t) \geq \bar{M}^{**}(t)$ ...

$M(t) \geq M^{**}(t)$, zatem

$$\overline{M}^{**}(t) \geq \left(\frac{t}{s}-1\right)\overline{M}(s) \quad \text{dla } t>s$$

Dla $t=2s>s$

$$\overline{M}(2s) \geq \overline{M}^{**}(2s) \geq (2-1)\overline{M}(s)=\overline{M}(s)$$

$$\overline{M}\left(\frac{1}{2}\int_\Omega |f|\,d\mu\right) \leq \overline{M}^{**}\left(\int_\Omega |f|\,d\mu\right) \leq \int_\Omega \overline{M}^{**}(|f|)\,d\mu$$

$$\wedge\!\!|$$

$$\int_\Omega \overline{M}(|f|)\,d\mu$$

KONIEC D-DU LEMATU

Ozn. $M_{x,\delta}(t) := \operatorname*{ess\,inf}_{y \in B(x, 3\delta)} M(y,t)$

Mamy:

$$M(x, |\nabla S_\delta u|) \lesssim \operatorname*{ess\,inf}_{y\in B(x,3\delta)} M(y, |(\nabla S_\delta u)(x)|) + 1$$

$$\lesssim S_\delta(M_{x,\delta} \circ |\nabla u|)(x) + 1 \lesssim \int_\Omega \rho_\delta(y) M_{x,\delta}\left(\left|\nabla u\left(\frac{x-y}{k_\delta}\right)\right|\right) dy + 1$$

$$\lesssim \int_\Omega \rho_\delta(y)\, M\left(\frac{x-y}{k_\delta}, \left|\nabla u\left(\frac{x-y}{k_\delta}\right)\right|\right) dy + 1$$

$$= S_\delta(M(\cdot, |\nabla u(\cdot)|)) + 1$$

Finiszujemy z Vitaliego.

Wniosek

Ω – dw., ogr., z dost. reg. brzegiem, $\mathcal{F}$ jest funkcjonałem zdefiniowanym wzorem:

$$\mathcal{F}[u]=\int_\Omega M(x,|\nabla u|)\,dx,$$ gdzie

$M \in \Delta_2$, M spełnia (B). Zał., że $\mathcal{F}[u_0]<\infty$, wówczas

$$\inf_{u_0+V_0^1L_M(\Omega)} \mathcal{F}[u] = \inf_{u_0+C_c^\infty(\Omega)} \mathcal{F}[u]$$

KMP $\blacksquare$