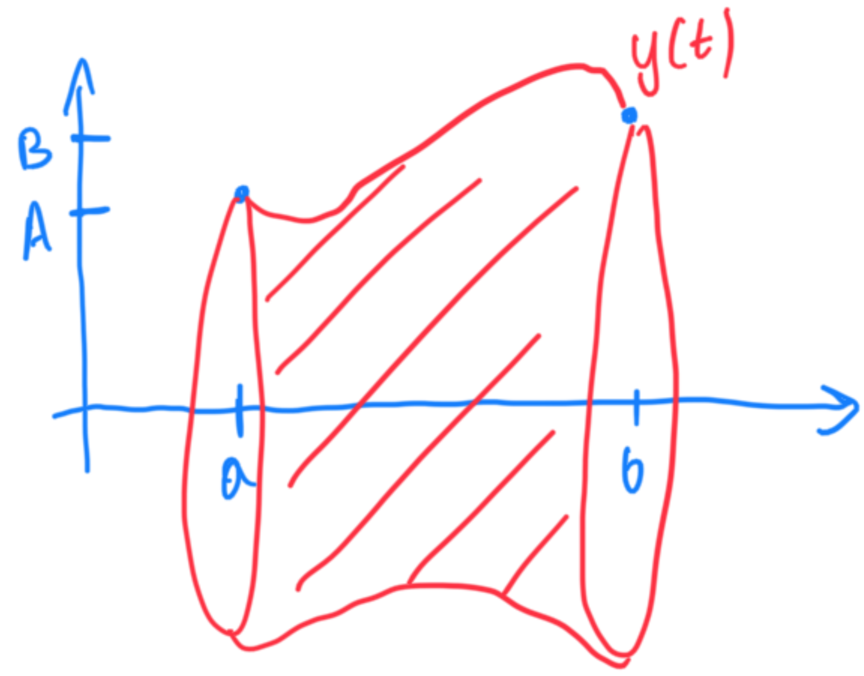
Wykład 2 Minimizery

Przykład 1: $F(y) = 2\pi \cdot \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$

$y(a) = A,\ y(b) = B$



$\dfrac{|a-b|}{|A-B|}$

Przykład 2: funkcje o ograniczonych pochodnych y

$$F(y) = \int_0^1 (2 \cdot y(t) \cdot y'(t) - 1)^2\, dt$$

$y(0) = 0$
$y(1) = 1$

$y^*(t) = \sqrt{t} \to y'^*(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$

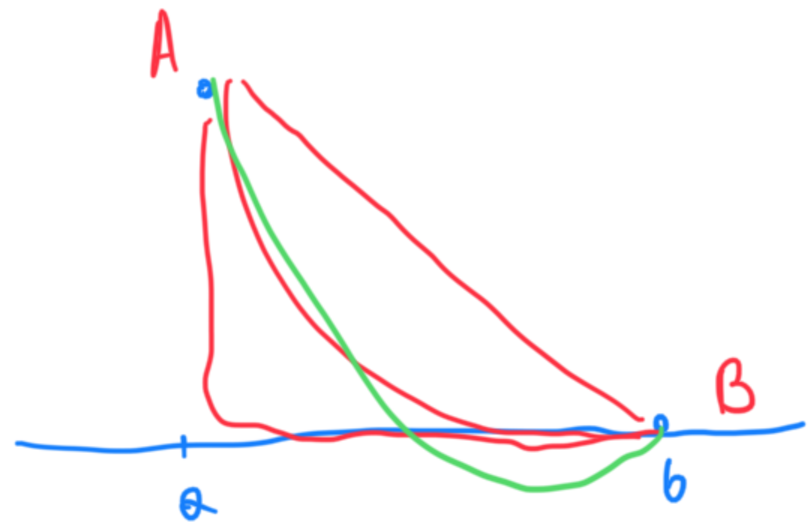
$F(y^*) = 0$

$$y_n(t) = \begin{cases} \sqrt{t} & \text{dla } t \in [\frac{1}{n}, 1] \\ t \cdot \sqrt{n} & \text{dla } t \in [0, \frac{1}{n}] \end{cases}$$

$y_n(0) = 0,\ y_n(1) = 1 \qquad F(y_n) \to F(y^*) = 0$

$$0 \le F(y_n) = \int_0^{\frac{1}{n}} (2nt - 1)^2\, dt \le \int_0^{\frac{1}{n}} (2tn)^2 + 1 = \frac{3}{n} \to 0$$

Przykład 3: Najkrótszy czas spadku



$\downarrow g$

Brachistochrona

$$F(y) = \int_a^b \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y(a)-y}}\, dt \qquad \begin{matrix} y(a) = A \\ y(b) = B \end{matrix}$$

Ogólny problem: szukamy takiej funkcji $y:[a,b]\to\mathbb{R}$ klasy E, że $y(a) = A$, $y(b) = B$.

Funkcja ta ma minimalizować funkcję

$$F(y) = \int_a^b \mathcal{L}(y, y')\, dt$$

gdzie $\mathcal{L}$ jest pewną funkcją klasy C^1

$\uparrow$ Lagrange'an

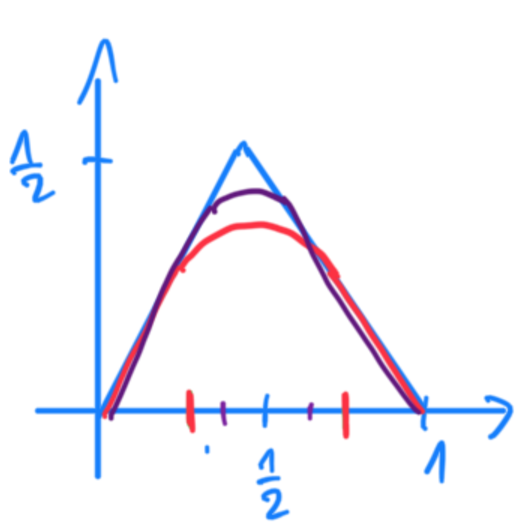
Jaka klasa E jest optymalna?

$E = C^1$

Przykład 4: Nie istnieje minimizer klasy C^1

$$F(y) = \int_0^1 (y'^2 - 1)^2\, dt \qquad y(0) = y(1) = 0$$

$$y^*(t) = \begin{cases} t & \text{dla } t\in[0,\frac{1}{2}] \\ 1-t & \text{dla } t\in[\frac{1}{2},1] \end{cases}$$



y^* nie jest oczywiście C^1

- $0 \le y_n \le y^*$

y_n klasy C^1 $\quad \bullet\ 0 \le |y_n'| \le 1$

$F(y_n) \to F(y^*)$ $\quad \bullet\ y_n = y^*$ dla $t \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1]$

$$0 \le F(y_n) = 0 + \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} (y_n'^2(t) - 1)^2 dt + 0 \le$$

$$\le \int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} 1\, dt = \frac{2}{n} \to 0$$

$y(0) = y(1) = 0$ oraz $F(y) = 0 \Rightarrow |y'|^2 = 1$

$\Rightarrow y' = \pm 1 \Rightarrow y(1) = \pm 1$ $\lightning$

Jednak $y^* = \begin{cases} t \\ 1-t \end{cases}$ ... jest Lipsz ...

<u>Przykład 5:</u> $\sqrt{t}$ nie jest Lipsz..., ale $\sqrt{t}$ jest $AC([0,1])$

Odcinek I dzielimy $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n+1} = b$

na każdym odcinku (t_i, t_{i+1}), y jest C^1

<u>Przykład 6:</u> (Mania'a) $F(y) = \int_0^1 (y^3 - t)^2 \cdot (y')^6 dt$

$y(0) = 0$
$y(1) = 1$

$y^*(t) = t^{\frac{1}{3}}$ $\quad y'^*(t) = \frac{1}{3} t^{-\frac{2}{3}}$

$F(y^*) = 0$ $\quad y^*$ jest AC, ale y^* nie jest Lipsz

Czy $E = AC$ jest okej?

1) $\sum |x_i - x_{i+1}| < \delta$
$\sum |f(x_i) - f(x_{i+1})| < \varepsilon$

Definicja funkcji bezwzgl. (absolutnie) ciągłych

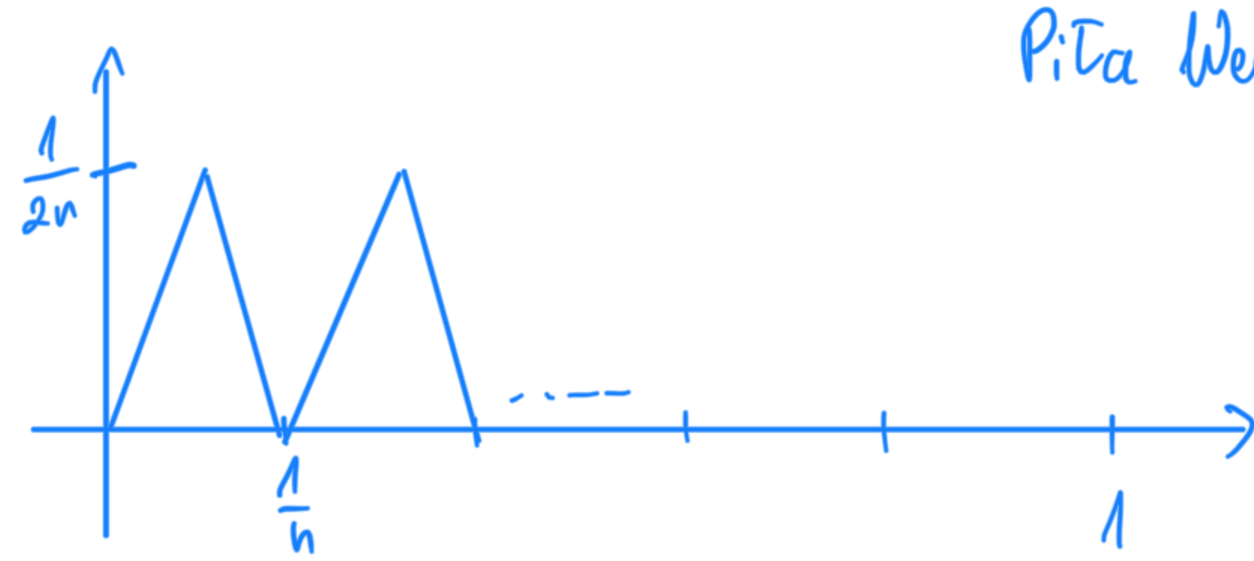
2) $\forall_t \quad y(t) = y(a) + \int_a^t y'(s)\, ds$

3) $\exists_{f \in L^1_{loc}} \; y(t) = y(a) + \int_a^t f(s)\, ds$, wówczas $f(s) = y'(s)$ p.w.

Przykład 7: Brak rozwiązań w AC

$$F(y) = \int_0^1 (y'(t)^2 - 1)^2 + y(t)^2 \, dt \qquad y(0) = y(1) = 0$$

Piła Weierstrassa

$y_n(t) =$ 

$$y_n'(t) \in \{-1, 1\} \text{ oraz } |y_n| \leq \frac{1}{2n}$$

$$0 \leq F(y_n) = \int_0^1 0 + y_n(t)^2 \, dt \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{2n}\right)^2 dt = \left(\frac{1}{2n}\right)^2 \to 0$$

Ale y^* nie jest absolutnie ciągła, bo zał. że jest $F(y^*) = 0$

$$\int_0^1 (y^*(t))^2 \, dt = 0 \Rightarrow y^*(t) = 0 \text{ p.w.} \overset{AC}{\Rightarrow} \int_0^1 (y^{*\prime}(t)^2 - 1)^2 = 1 \;\; \lightning$$

Twierdzenie: Równanie Du Bois-Reymonda). Niech y^* będzie minimizerem F, który AC. Wówczas

$$P(y, v) := L(y, v) - y' L_v(y, v)$$

jest stała wzdłuż (y^*, y'^*). Innymi słowy

$$L(y^*, y'^*) - y^{*\prime} L_v(y^*, y^{*\prime}) = C$$

Dowód: Oczywiste ... Załóżmy że y jest C^2

Dowód:

$$\frac{d}{dt} P(y^*, y^{*\prime}) = \frac{d}{dt}\left[\mathcal{L}(y^*, y^{\prime *}) - y^{*\prime} \mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime})\right] =$$

$$= \mathcal{L}_y(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime} + \cancel{\mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime\prime}} +$$

$$- \frac{d}{dt}\mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime} - \cancel{\mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime\prime}} =$$

równanie E-L

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime}) = \mathcal{L}_y(y^*, y^{*\prime})$$

$$= \mathcal{L}_y(y^*, y^{*\prime}) y^{*\prime} - \frac{d}{dt}\mathcal{L}_v(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime} =$$

$$= \mathcal{L}_y(y^*, y^{*\prime}) y^{*\prime} - \mathcal{L}_y(y^*, y^{*\prime}) \cdot y^{*\prime} = 0$$

$$\Rightarrow P(y^*, y^{*\prime}) = \text{const}$$

Ad Przykład 1

$$F(y) = 2\pi \cdot \int_a^b y(t) \cdot \sqrt{1 + y'(t)^2}\, dt$$

Więc $\mathcal{L}(y, y') = y \cdot \sqrt{1+y'^2} \cdot 2\pi$

$$y^* \cdot \sqrt{1+(y^{*\prime})^2} - y^{*\prime} \cdot \frac{y^{*\prime} \cdot y^*}{\sqrt{1+(y^{*\prime})^2}} = C$$

$$\frac{y^*(1+(y^{*\prime})^2) - (y^{*\prime})^2 \cdot y^*}{\sqrt{1+(y^{*\prime})^2}} = C$$

$$\frac{y^*}{\sqrt{1+(y^{*\prime})^2}} = C \Rightarrow y^*(t) = \frac{1}{\alpha} \cdot \cosh(\alpha t + \beta)$$

α, β zależą od war. brzeg.

- $\frac{|b-a|}{|B-A|}$ małe $\quad y^* = \frac{1}{\alpha} \cdot \cosh(\alpha t + \beta)$

- $\frac{|b-a|}{|B-A|}$ duże $F(y) \sim (A^2+B^2)\cdot \pi$