100 lat PTM Kraków, 2 – 7 IX 2019

Chaos Liniowy i Analiza Spektralna Operatorów

Marcin Moszyński

Uniwersytet Warszawski
Wydział Matematyki Informatyki i Mechaniki

Liniowe Układy Dynamiczne i Chaos Liniowy

1. Liniowa dynamika i jej generator

Liniowa zależność dynamiki od warunków początkowych (NIE od czasu ...), zatem:

- Przestrzeń stanów układu — przestrzeń Banacha $X \neq \{\mathbf{0}\}$
- **Liniowy Układ Dynamiczny** w X: rodzina $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ operatorów ograniczonych $T_t \in \mathcal{B}(X)$, gdzie $\mathbb{T}$ — *zbiór czasów* – tu:
  - dla czasu **dyskretnego** $\mathbb{T} := \mathbb{N} := \{0, 1, 2, \ldots\}$
  - dla czasu **ciągłego** $\mathbb{T} := [0; +\infty)$

  oraz $\mathcal{T}$ jest:
  - półgrupą ($T_{t+s} = T_t T_s$)
  - silnie ciągła „po t” (dla czasu ciągłego),

tzn. trajektorie dla $x \in X$

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto T_t x \in X$$

są ciągłe (C_0 - półgrupa)

Sens fizyczny: $T_t x$ — „stan x po czasie t"

Generator A półgrupy $\mathcal{T}$:

- gdy czas dyskretny:
  $A := T_1$

tzn. trajektorie dla $x \in X$

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto T_t x \in X$$

są ciągłe (C_0 - półgrupa)

Sens fizyczny: $T_t x$ — „stan x po czasie t"

Generator A półgrupy $\mathcal{T}$:

- gdy czas dyskretny:
  $A := T_1 \quad \Longrightarrow \quad T_n = A^n, \quad n \in \mathbb{N}$
- gdy czas ciągły:
  A — infinitezymalny generator C_0 półgrupy $\mathcal{T}$ (silna pochodna $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ w $t = 0$)

tzn. trajektorie dla $x \in X$

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto T_t x \in X$$

są ciągłe (C_0 - półgrupa)

Sens fizyczny: $T_t x$ — „stan x po czasie t"

Generator A półgrupy $\mathcal{T}$:

- gdy czas dyskretny:
  $A := T_1 \quad \Longrightarrow \quad T_n = A^n, \quad n \in \mathbb{N}$
- gdy czas ciągły:
  A — infinitezymalny generator C_0 półgrupy $\mathcal{T}$ (silna pochodna $\mathcal{T} = \{T_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ w $t = 0$) $\quad \Longrightarrow \quad$ formalnie „$T_t = e^{tA}$"
  (zawsze — A domknięty operator liniowy z gęstą w X dziedziną, gdy A jest ograniczony, to pow. "=" jest ścisła)

2. Chaos liniowy („topologiczny”)

- **orbita** punktu x: $\mathrm{Orb}(x) := \{T_t x : t \in \mathbb{T}\}$
- x jest **okresowy** $\iff$ $\exists_{t>0}\ T_t x = x$

Pewne dwa pojęcia „topologicznego nieuporządkowania” $\mathcal{T}$:

Definicja

- $\mathcal{T}$ jest **tranzytywna** $\iff$ dla każdego otwartego $U \subset X$

$$\bigcup_{x \in U} \mathrm{Orb}(x) \ \text{ jest gęsty w } X,$$

 równoważnie: każde dwa niepuste otwarte $U, V \subset X$ można „połączyć pewną trajektorią”
- $\mathcal{T}$ jest **hipercykliczna** $\iff$ istnieje orbita gęsta w X.

Uwaga Dla X ośrodkowej: hipercykliczność $\iff$ tranzytywność

Definicja (Devaney, 1986)

- $\mathcal{T}$ jest **chaotyczna** $\iff$ jest tranzytywna i zbiór punktów okresowych dla $\mathcal{T}$ jest gęsty w X
- $\mathcal{T}$ jest **sub-chaotyczna** $\iff$ istnieje domknięta podprzestrzeń $\tilde{X} \neq \{\mathbf{0}\}$ niezmiennicza dla $\mathcal{T}$ taka, że $\tilde{\mathcal{T}} := \{T_t|_{\tilde{X}}\}_{t\in\mathbb{T}}$ jest chaotyczna jako półgrupa w $\tilde{X}$ („$\mathcal{T}$ jest chaotyczna **w** $\tilde{X}$ ")
- Każda $\tilde{X}$ j. w.: **przestrzeń chaotyczności dla** $\mathcal{T}$

Uwaga $\mathcal{T}$ jest **chaotyczna** w $X \implies$

- $\dim X = +\infty$
- $\mathcal{T}$ spełnia tzw. "SDIC" — „wrażliwą zależność" od warunków początkowych

3. Przykład Rolewicza

Przykład (Rolewicza 1969) Rozważmy operator T_{-1} „przesunięcia w lewo" w $X = \ell^2(\mathbb{N})$

$$T_{-1}(x_0, x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Półgrupa generowana przez „skalowany" operator T_{-1}

$$A := \mu T_{-1},$$

dla skalowania $|\mu| > 1$ („operator Rolewicza") jest hipercykliczna.

- Zapewne pierwszy przykład operatora liniowego o tej własności
- nazwa „hipercykliczny" — około 1986 (>1969)...
- Dowód działa dla $X = \ell^p(\mathbb{N})$ z wszystkimi $p \in [1; +\infty)$
- Czy jest również chaos...??

Spektralne kryteria chaotyczności typu DSW

1. Selekcje wektorów własnych

A — generator $\mathcal{T}$, „spektralne kryteria chaotyczności", tzn. wyniki postaci:

pewne własności spektralne A $\Longrightarrow$ *chaotyczność / sub-chaot. $\mathcal{T}$*

Niech $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$ oraz $f : \Omega \longrightarrow X$

Definicja f **jest selekcją wektorów własnych** A **(na** Ω**)** $\Longleftrightarrow$

$$\forall_{\lambda \in \Omega} \quad f(\lambda) \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I)$$

Uwaga: Nie każde $f(\lambda)$ musi być wektorem własnym! — Może być jeszcze $f(\lambda) = 0 \ldots$ — wtedy może być $\lambda \notin \sigma_{\mathrm{p}}(A)$

Selekcja f jest:

- **nietrywialna** $\iff$ $f \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — funkcja stale równa zero)
- **analityczna** $\iff$ Ω jest otwarty i f jest wektorową funkcją analityczną

2. Podstawowe spektralne kryterium (sub-)chaotyczności

Oznaczmy:

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \mathbb{U} & \\ & \end{cases}$$

2. Podstawowe spektralne kryterium (sub-)chaotyczności

Oznaczmy:

$$\mathbb{B} := \begin{cases} \mathbb{U} := \{z \in \mathbb{C} : \ |z| = 1\} & \text{dla czasu dyskretnego} \\ \mathbf{i}\mathbb{R} & \text{dla czasu ciągłego} \end{cases}$$

Kryterium (Godefroy + Shapiro, DSW = Desch + Schappacher + Webb, Banasiak + M.M.)
Jeśli istnieje nietrywialna analityczna selekcja f wektorów własnych A na otwartym spójnym $\Omega \subset \mathbb{C}$, takim że

$$\Omega \cap \mathbb{B} \neq \varnothing,$$

to $\mathcal{T}$ jest sub-chaotyczna. Ponadto, gdy f jest taka jak wyżej, to $\overline{\mathrm{lin}\ f(\Omega)}$ jest przestrzenią chaotyczności dla $\mathcal{T}$.
$\Longrightarrow \mathcal{T}$ — chaotyczna, jeśli $\mathrm{lin}\ f(\Omega)$ jest gęsta w X.

Definition $x \in X$ is **cyclic** for $B \in \mathcal{B}(X)$ iff

$$\overline{\mathrm{lin}\{B^n x : n \in \mathbb{N}\}} = X.$$

The above Criterion + the R.-I. point spectrum results give:

Theorem ("The Right-Inversion Spectral Chaos Criterion": M.M. 2014)
Suppose that $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$ and $\mathrm{dist}\,(\mathbb{B}, \lambda_0) < \frac{1}{r_*(A,\lambda_0)}$. Then:

- $\mathcal{T}$ is sub-chaotic
- $\overline{\mathrm{lin}\{B^n f_0 : n \in \mathbb{N}\}}$ is a space of chaoticity for $\mathcal{T}$ for any $f_0 \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I) \setminus \{0\}$ and $B \in \mathrm{Rinv}(A, \lambda_0)$
- If, moreover, there exists $f_0 \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I)$ which is cyclic for some $B \in \mathrm{Rinv}(A, \lambda_0)$, then $\mathcal{T}$ is chaotic.

Example (chaos for Rolewicz type operators) The discrete dynamical system $\mathcal{T}$ generated by the Rolewicz type operator μT_{-1} with $|\mu| > 1$ is chaotic in $\ell^p(\mathbb{N})$ with $p < +\infty$, and not only hypercyclic (or only sub-chaotic).

Proof Recall that $r_*(A, 0)^{-1} = |\mu|$. Hence it suffices to take $\lambda_0 = 0$, $B = \mu^{-1} T_{+1}$ and $f_0 = e_0$, where $(e_0)_n = 0$ for $n > 0$, $(e_0)_0 = 1$.

Remark (chaos for weighted left shift - generated discrete and continuous d. s.) The same argumentation proves that for $p < +\infty$ both discrete and continuous d. s. generated by the weighted left shift $A := T_{-1,w}$ in $\ell^p(\mathbb{N})$ are chaotic, providing that $s = \inf_{n \geq 1} |w_n| > 1$ (and that A generates a d.s.).

4. Super-upper-triangular chaotic operators

We shall generalize the chaoticity result of the last weighted left shift example. Here $X = \ell^p(\mathbb{N})$ with $1 \leq p < +\infty$ or $X = c_0$ (— complex sequences converging to 0).

Matrix terms for $A \in \mathcal{B}(X)$:

$$A(k,l) := (Ae_l)_k, \qquad k, l \in \mathbb{N}, ,$$

where $e_s \in X$ is the s-th standard "base" vector:

$$(0, 0, 0 \ldots, 0, \overset{s}{1}, 0, 0, \ldots)$$

Definition

- A is **upper-triangular** iff $A(k,l) = 0$ for any $k > l$, $k, l \in \mathbb{N}$
- A is **super-upper-triangular** iff $A(k,l) = 0$ for any $k \geq l$, $k, l \in \mathbb{N}$ (i.e. A posseses only zero terms below the first super diagonal);

- $A_{\text{sup-dia}}$ is the superdiagonal part of A (i.e. the part with only the first super diagonal of A) and A_{off} is off-superdiagonal part of A":

$$(A_{\text{sup-dia}}x)_j := A(j, j+1)x_{j+1} \quad \text{for } x \in X, j \in \mathbb{N}, \quad A_{\text{off}} := A - A_{\text{sup-dia}}.$$

$$\begin{pmatrix} 0 & w_1 & * & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & w_2 & * & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & w_3 & * & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & w_4 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}$$

Theorem Let A be a bounded super-upper-triangular operator in X. If for some $r > 0$

$$|A(j, j+1)| \geq 1 + r, \qquad \text{for any} \quad j \in \mathbb{N} \tag{2.1}$$

and

$$\|A_{\text{off}}\| < r, \tag{2.2}$$

then the linear dynamical system $\mathcal{T}$ in X (discrete or continuous one) generated by $A + \beta I$ is chaotic, providing

$$|\mathrm{Re}\,\beta| \leq 1 \quad \text{at the continuous case,}$$
$$|\beta| \leq 2 \qquad \text{at the discrete case.}$$

Proof - is based on "The Right-Inversion Spectral Chaos Criterion" (used for $A + \beta I$ instead of A and for $\lambda_0 := \beta$) and on:

Lemma If $B \in \mathcal{B}(X)$ satisfies:

$$j = k + 1 \Longrightarrow B(j, k) \neq 0, \qquad j > k + 1 \Longrightarrow B(j, k) = 0$$

for any $j, k \in \mathbb{N}$, then e_0 is cyclic for B.

This research is supported by Polish Ministry of Science and Higher Education grant no. NN 201 605640 and National Science Centre – Poland grant no. 2013/09/B/ST1/04319

THE END

R.-I. Point Spectrum and the Local Spectral Theory

1. Right-inversion point spectrum

X — a Banach space, $X \neq \{\mathbf{0}\}$. Denote:

- $\mathcal{B}(X)$ — the space of bounded linear operators on X (here the domain $D(A)$ of A equals X)
- $\mathcal{C}(X)$ — the set of closed linear operators in X (the domain $D(A)$ of A need not be dense)

Let $A \in \mathcal{C}(X)$. We study a particular part of $\sigma_{\mathrm{p}}(A)$ — the point spectrum (= the set of eigenvalues).

Definition The **right-inversion (r.-i.) point spectrum** of A:

$$\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) := \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) : \exists_{B \in \mathcal{B}(X)} \ (A - \lambda I)B = I\}.$$

Remark $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A) \Longrightarrow \mathrm{Ran}\,(A - \lambda I) = X$.
Hence, defining also **the surjective point spectrum** of A by

$$\sigma_{\mathrm{ps}}(A) := \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) : \ \mathrm{Ran}\,(A - \lambda I) = X\},$$

we get $\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ps}}(A)$.

Denote: $\mathrm{Rinv}(A,\lambda) := \{B \in \mathcal{B}(X) : \ (A-\lambda I)B = I\}$.
Note:

- $\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) = \{\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}}(A) : \ \mathrm{Rinv}(A,\lambda) \neq \varnothing\}$.
- if $B \in \mathrm{Rinv}(A,\lambda)$ and $B' \in \mathcal{B}(X)$, then

$$B' \in \mathrm{Rinv}(A,\lambda) \Longleftrightarrow \mathrm{Ran}\,(B'-B) \subset \mathrm{Ker}\,(A-\lambda I).$$

For $\lambda \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$ denote:

$$r_*(A,\lambda) := \inf\{\|B\| : \ B \in \mathrm{Rinv}(A,\lambda)\}.$$

Proposition If $A \in \mathcal{C}(X)$, then $\sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$ is an open subset of $\mathbb{C}$, moreover if $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$, then

$$D(\lambda_0, r_*(A, \lambda_0)^{-1}) \subset \sigma_{\mathrm{p}^*}(A),$$

where: $D(\lambda_0, r) := \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - \lambda_0| < r\}$.

Example Rolewicz type operator $A := \mu T_{-1}$,
where T_{-1} is the left-shift

$$T_{-1}(x_0, x_1, x_2, \dots) := (x_1, x_2, x_3, \dots)$$

in $X = \ell^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq +\infty$ and $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. We have:

- $0 \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$ and $B := \mu^{-1} T_{+1} \in \mathrm{Rinv}(A, 0)$, where T_{+1} is the forward shift operator

$$T_{+1}(x_0, x_1, x_2, \dots) := (0, x_0, x_1, \dots),$$

- $r_*(A, 0) = |\mu|^{-1}$ (the "inf" is reached by B as above)
- $\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) = \sigma_{\mathrm{p}}(A) = D(\lambda_0, |\mu|^{-1})$.

Note that in the case $p = 2$ and $|\mu| > 1$ this operator is known as **Rolewicz operator** [S. Rolewicz "On orbits of elements", Studia Math. 1969, vol. 32].

Example weighted left shift $A := T_{-1,w}$ in $X := \ell^p(\mathbb{N})$, where $w = \{w_n\}_{n\geq 1}$ — "the weight" — a complex sequence with all $w_n \neq 0$ and $s := \inf_{n\geq 1} |w_n| > 0$,

$$T_{-1,w}(x_0, x_1, x_2, \dots) := (d_1 x_1, d_2 x_2, d_3 x_3, \dots),$$

i.e., $T_{-1,w}$ is defined by the upper-diagonal semi-infinite matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & w_1 & & \\ & 0 & w_2 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \end{pmatrix}$$

Note: it is a generalization of the Rolewicz type oper. and $T_{-1,w}$ can be unbounded!

We have:

- $0 \in \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$ and $B := T_{+1,w^{-1}} \in \mathrm{Rinv}(A, 0)$, where $T_{+1,w^{-1}}$ is the "w^{-1}-weighted" forward shift operator

$$T_{+1,w^{-1}}(x_0, x_1, x_2, \ldots) := (0, \frac{x_0}{w_1}, \frac{x_1}{w_2}, \ldots),$$

- $r_*(A, 0) = s^{-1}$ (the "inf" is reached by B as above)
- $D(\lambda_0, s) \subset \sigma_{\mathrm{p}^*}(A)$.

2. R.-I. point spectrum and LSP

Let $A \in \mathcal{C}(X)$ and let $f : \Omega \longrightarrow X$, where $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$.

Definition f **is a selection of eigenvectors for** A **(on** Ω**)** iff

$$f(\lambda) \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda I) \quad \text{for any} \quad \lambda \in \Omega$$

abbreviation: **e.v. selection** (alternative name: **spanning eigenvector field**).
An e.v. selection f is:

- **non-trivial** iff $f \neq \mathbf{0}$ ($\mathbf{0}$ — the constant-zero function);
- **analytic** iff Ω is an open set and f is an X-vector-valued analytic function.

For $\varnothing \neq \Omega \subset \mathbb{C}$, Ω — open, denote:

$$\mathcal{S}(\Omega, A) := \{f \;:\; f \;\text{ is an analytic e. v. selection for } A \text{ on } \Omega\}.$$

We are interested in such $A \in \mathcal{C}(X)$ that possess a non-trivial analytic e.v. selection on a neighborhood of a given point $\lambda_0 \in \mathbb{C}$.

Proposition Let $A \in \mathcal{C}(X)$, $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{p}*}(A)$, $B \in \mathrm{Rinv}(A, \lambda_0)$ and let $U := D(\lambda_0, \|B\|^{-1})$ (recall that $U \subset \sigma_{\mathrm{p}*}(A)$ in such case). Then for any $f_0 \in \mathrm{Ker}\,(A - \lambda_0 I) \setminus \{0\}$ there exists $f \in \mathcal{S}(U, A)$ such that $f(\lambda_0) = f_0$ and $f(\lambda) \neq 0$ for any $\lambda \in U$. Such f can be given by

$$f(\lambda) := \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^n B^n f_0, \quad \lambda \in U. \tag{3.3}$$

Definition $A \in \mathcal{C}(X)$ has the **local selection property** at λ_0 iff there exists $\epsilon > 0$ such that $\mathcal{S}(D(\lambda_0, \epsilon), A) \neq \{\mathbf{0}\}$.
Abbreviation: **LSP** .

Proposition If A has the LSP at λ_0, then there exists $\epsilon > 0$ and such $f \in \mathcal{S}(D(\lambda_0, \epsilon), A)$, that $f(\lambda_0) \neq 0$.
In particular $\lambda_0 \in \operatorname{Int} \sigma_{\mathrm{p}}(A)$.

Corollary Defining **the LSP point spectrum** of A by

$$\sigma_{\mathrm{LSP}}(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : A \text{ has the LSP at } \lambda\}$$

we get

- $\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) \subset \sigma_{\mathrm{LSP}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A)$;
- $\sigma_{\mathrm{LSP}}(A)$ is an open subset of $\mathbb{C}$.

But recall that also: $\sigma_{\mathrm{p}*}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ps}}(A)$

Question Is there any inclusion between $\sigma_{\mathrm{ps}}(A)$ and $\sigma_{\mathrm{LSP}}(A)$?

3. Relations with Local Spectral Theory

The answer can be obtained with the usie of some basic facts from Local Spectral Theory
Recall the main definition:

Definition A **has the SVEP at** λ_0 iff $\mathcal{S}(\Omega, A) = \{\mathbf{0}\}$ for any open connected neighborhood Ω of λ_0. A **has the non-SVEP at** λ_0 iff A does not have the SVEP at λ_0.

Corollary A has the LSP at λ_0 iff A has the NON-SVEP at λ_0.

Hence, using a J.K. Finch "non-SVEP" result (1975) we can get:

Theorem If $A \in \mathcal{C}(X)$, then

$$\sigma_{\mathrm{p}^*}(A) \subset \sigma_{\mathrm{ps}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{LSP}}(A) \subset \sigma_{\mathrm{p}}(A).$$