Twierdzenie (o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych)

Załóżmy, że funkcje $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, są różniczkowalne na (a,b), ciągłe na $[a,b]$, a ciąg ich pochodnych f_n' jest jednostajnie zbieżny na (a,b). Załóżmy też, że dla pewnego $x_0 \in [a,b]$ ciąg liczbowy $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ jest zbieżny. Wówczas ciąg (f_n) jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$ do pewnej funkcji f, ciągłej na $[a,b]$ i różniczkowalnej na (a,b) i zachodzi równość

$$\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right)' = f' = \lim_{n\to\infty} f_n' \qquad \text{na } (a,b).$$

Dowód: Wiemy, że (1) ciąg (f_n') jest jednost. zbieżny i (2) ciąg $(f_n(x_0))$ jest zbieżny.

Dla $n, m \in \mathbb{N}$ oznaczmy $F_{nm} = f_n - f_m$.

Z (1) wiemy, że $\forall_{\varepsilon > 0} \exists_{n_0} \forall_{n,m > n_0} \sup\limits_{(a,b)} |f_n' - f_m'| = \sup\limits_{(a,b)} |F_{nm}'| < \varepsilon$.

Z (2), że $\exists_{n_1} \forall_{n,m > n_1} |f_n(x_0) - f_m(x_0)| = |F_{nm}(x_0)| < \varepsilon$.

Weźmy dowolne $x \in [a,b]$ i $n, m > \max(n_0, n_1)$

$$|f_n(x) - f_m(x)| = |F_{nm}(x)| \leq |F_{nm}(x) - F_{nm}(x_0)| + |F_{nm}(x_0)|$$

$$\underset{\text{tw. Lagrange'a}}{=} |F_{nm}'(\xi)||x - x_0| + |F_{nm}(x_0)| \qquad \text{dla pewnego } \xi \text{ między } x \text{ a } x_0$$

$\leq \varepsilon(|b-a|+1)$, co dowodzi, że (f_n) spełnia jednostajny warunek Cauchy'ego na $[a,b]$.

Stąd f_n zbiega jednostajnie do pewnej funkcji $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

Niech teraz $g=\lim f'$ i niech $x\in(a,b)$

$$\left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-g(x)\right| \leq \left|\frac{f(x+h)-f(x)}{h}-\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}\right| +$$

$$+\left|\frac{f_n(x+h)-f_n(x)}{h}-f_n'(x)\right|+\left|f_n'(x)-g(x)\right| =$$

$$= I_1+I_2+I_3.$$

Ustalmy $\varepsilon>0$.

Z tego, że $f_n' \rightrightarrows g$ wiemy, że $\exists_{n_0}\ \forall_{n>n_0}\ I_3<\varepsilon$.

Wiemy też, że jeżeli n i m są dost. duże $(n,m>n_1)$, to $\varepsilon > |F_{nm}'(x)| = \lim\limits_{h\to 0}\left|\frac{f_m(x+h)-f_n(x+h)-f_m(x)+f_n(x)}{h}\right|$,

zatem istnieje $\delta>0$ t.ż. dla $|h|<\delta$ i $n,m>n_1$

$$\left|\frac{f_m(x+h)-f_n(x+h)-f_m(x)+f_n(x)}{h}\right|<\varepsilon$$

biorąc granicę lewej strony przy $m\to\infty$ dostajemy

$$\varepsilon \geqslant \left|\frac{f(x+h)-f_n(x+h)-f(x)+f_n(x)}{h}\right| = I_1 \quad \text{o ile } |h|<\delta,\ n>n_1$$

Na koniec, dla ustalonego x, istnieje δ_1

$$I_2 = \left| \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} - f_n'(x) \right| < \varepsilon, \text{ o ile tylko } |h| < \delta_1,$$

$$\text{bo } \lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f_n'(x).$$

Stąd, o ile tylko $|h| < \min(\delta, \delta_1)$,

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - g(x) \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$$

zatem

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = g(x).$$

□

Zadanko: Załóżmy dodatkowo, że dla każdego n funkcje f_n mają pochodne prawostronne w a i że ciąg f_n' jest zbieżny jednostajnie nie tylko na (a,b), ale na $[a,b)$. Wykazać, że f ma pochodną prawostronną w a i że $\lim_{n\to\infty} f_{n+}'(a) = f_+'(a)$.

Twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych możemy zastosować do ciągu sum częściowych szeregu funkcyjnego, co prowadzi do

<u>Twierdzenie</u> (o różniczkowaniu szeregu funkcyjnego wyraz po wyrazie)

Jeżeli funkcje $b_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ są różniczkowalne na (a,b), szereg $\sum b_n'$ jest jednostajnie zbieżny na (a,b) i dla pewnego $x_0 \in [a,b]$ zbieżny jest szereg $\sum b_n(x_0)$, to szereg $\sum b_n$ jest jednostajnie zbieżny na $[a,b]$, a jego suma jest funkcją różniczkowalną, co więcej $\left(\sum b_n\right)' = \sum b_n'$ na (a,b).

Jeżeli funkcje b_n mają pochodną jednostronną w a (lub b) i $\sum b_n'$ jest zbieżny jednostajnie na (a,b) i jest też zbieżny w a (lub b), to równość $\left(\sum b_n\right)' = \sum b_n'$ zachodzi również w a (lub b).

<u>Zadanko</u>: Sformułować analogiczne twierdzenie dla niekoniecznie zwartych przedziałów.

Problem: Dla $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ nie zachodzi tw. Lagrange'a o wart. średniej.

Przykład: $\exp: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\exp' = \exp$, $\exp(0) = \exp(2\pi i)$,

więc
$$\frac{\exp(2\pi i) - \exp(0)}{2\pi i} = 0 \neq \exp'(\xi)$$

dla żadnego ξ nie ma równości, bo exp nie przyjmuje wartości 0.

Nie mniej zachodzi twierdzenie:

Tw. Jeżeli $\Omega \subset \mathbb{C}$ jest wypukły, $f: \Omega \to \mathbb{C}$, jest różniczkowalna, to dla dowolnych $z, w \in \Omega$
$$|f(z) - f(w)| \leq \sup_{\Omega} |f'| \cdot |z - w|$$

Wniosek: Jeżeli f' jest ograniczona na Ω, to f spełnia na Ω warunek Lipschitza ze stałą $\sup_{\Omega} |f'|$.

Zauważmy, że w dowodzie twierdzenia o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych potrzebujemy nie tyle twierdzenia Lagrange'a, co powyższego wniosku, dlatego też twierdzenie o różniczkowaniu ciągów funkcyjnych zachodzi również dla funkcji o wartościach zespolonych.

Dowód twierdzenia

Na początek

Lemat: Niech $H: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ będzie funkcją taką, że $u = \operatorname{Re} H$ i $v = \operatorname{Im} H$ są różniczkowalne. Wówczas $\Phi_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana wzorem $\Phi_a(t) = |H(t)|^a$ jest, dla $a > 1$, różniczkowalna i zachodzi ~~wzór~~ nierówność

$$|\Phi_a'(t)| \leq a |H(t)|^{a-1} |u'(t) + i v'(t)|$$
$$= a |H(t)|^{a-1} |H'(t)|$$

Dowód lematu:

W punktach t, w których $H(t) \neq 0$, jest łatwo, bo $t \mapsto |t|^{a/2}$ jest różniczkowalny w $t \neq 0$.

Stąd dla t takiego, że $H(t) \neq 0$ mamy

$$|\Phi_a'(t)| = \left((u(t)^2 + v(t)^2)^{a/2} \right)' = \frac{a}{2} (u(t)^2 + v(t)^2)^{\frac{a}{2} - 1}$$
$$\cdot (2u(t)u'(t) + 2v(t)v'(t)) = \frac{a}{2} \cancel{|H(t)|^{a-2} \cdot 2 \langle (u(t), v(t)), (u'(t), v'(t)) \rangle}$$

$$= \frac{a}{2} |H(t)|^{a-2} \cdot 2 \underbrace{\langle}_{\text{iloczyn skalarny w } \mathbb{R}^2} (u(t), v(t)), (u'(t), v'(t)) \rangle$$

$$\underset{\text{nier. Schwarza}}{\leq} a |H(t)|^{a-2} (u(t)^2 + v(t)^2)^{1/2} (u'(t)^2 + v'(t)^2)^{1/2}$$

$$= a |H(t)|^{a-1} |H'(t)|.$$

Jeżeli $H(t)=0$, to chcemy wykazać, że $|\Phi_a'(t)| \leq 0$, a więc że $\Phi_a'(t)=0$.

$$\Phi_a'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{|H(t+h)|^a - |H(t)|^a}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|H(t+h)|^a}{h}.$$

Oszacujmy zatem $\left|\frac{|H(t+h)|^a}{h}\right| = \frac{|H(t+h)|^a}{|h|} =$

$$= \frac{\left(u(t+h)^2 + v(t+h)^2\right)^{a/2}}{|h|} = \frac{\left(u(t+h)^2+v(t+h)^2\right)^{1/2}}{|h|} \cdot |H(t+h)|^{a-1}$$

$$\leq \frac{|u(t+h)| + |v(t+h)|}{|h|} \cdot |H(t+h)|^{a-1} = (*)$$

Teraz skorzystamy z tego, że $H(t)=0 \Rightarrow u(t)=v(t)=0$.

Wiemy, że $\frac{u(t+h)}{h} = \frac{u(t+h)-u(t)}{h} \to u'(t)$

i analogicznie $\frac{v(t+h)}{h} \to v'(t)$, więc dla małych h funkcje $\left|\frac{u(t+h)}{h}\right|$ i $\left|\frac{v(t+h)}{h}\right|$ są ograniczone.

Wiemy też, że $H(t+h) \xrightarrow[h\to 0]{} H(t)=0$.

Stąd $\lim_{h\to 0} (*) = 0$, co dowodzi, że $\Phi_a'(t)=0$.

Wniosek z Lematu

Niech H będzie jak w Lemacie i niech $H(0)=0$. Wtedy $|H(1)| \leq \sup_{(0,1)} |H'|$.

Dowód: Zastosujmy tw. Lagrange'a do Φ_a:

$$|H(1)|^a = |\Phi_a(1) - \Phi_a(0)| \leq \sup_{(0,1)} |\Phi_a'| \leq$$

$$\leq \sup_{t\in(0,1)} a\,|H(t)|^{a-1} \cdot |H'(t)|$$

$$\leq a \left(\sup_{(0,1)} |H|\right)^{a-1} \cdot \sup_{(0,1)} |H'| \leq a \left(\sup_{(0,1)} |H|+1\right)^{a-1} \cdot \sup_{(0,1)} |H'|$$

Biorąc $a \to 1$ dostajemy teza, bo $\sup_{(0,1)} |H|$ jest skończony.

Dowód twierdzenia

Niech $z, w \in \Omega$. Zbiór Ω jest wypukły, więc dla $t \in [0,1]$ $z + t(w-z) \in \Omega$.

Niech $H(t) = f(z+t(w-z)) - f(z)$.

Funkcja H spełnia założenia Lematu, $H(0)=0$, więc

$$|H(1)| = |f(w) - f(z)| \leq \sup_{(0,1)} |H'|,$$ ale

$$H'(t) = f'(z+t(w-z)) \cdot (w-z),$$ więc

$$\sup_{(0,1)} |H'| \leq \sup_{\Omega} |f'| \cdot |w-z|. \qquad \square$$

Ważny wniosek: $f:\Omega \to \mathbb{C}$ spełnia $f'=0$ na Ω, to $f = \text{const}$.

Przykład zastosowania

Przyjrzyjmy się funkcji $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$

Zadanko: ten szereg jest zbieżny dla wszystkich z spełniających $|z| \le 1$, $z \ne 1$, więc f jest określona na $\overline{B}(0,1) \setminus \{1\} \subset \mathbb{C}$.

kuła domknięte o środku w 0 i prom. 1

Z kryterium Weierstrassa dla każdego $q \in (0,1)$ szereg $\sum z^n$ jest jednostajnie zbieżny na $|z| \le q$ (bo $\sum q^n$ jest zbieżny). Szereg $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$ jest też zbieżny dla $z=0$, więc z tw. o różniczkowaniu szeregów wyraz po wyrazie $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$ dla $|z| \le q$, a z dowolności q – dla wszystkich $|z| < 1$.

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \text{ więc } f''(z) = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Niech $g(z) = \exp(-f(z))$, wtedy $g'(z) = -f'(z)g(z)$

$$g''(z) = \underbrace{\left(-f''(z) + f'(z)^2\right)}_{=0} g(z), \text{ więc } g''(z) = 0$$

dla wszystkich $|z| < 1$. Stąd $g'(z) = \text{const}$, ale $g'(0) = -\exp(-f(0)) = -\exp(0) = -1$, więc $g'(z) = -1$.

Stąd $h(z) = g(z) + z$ spełnia $h'(z) = 0$, więc $h(z) = \text{const}$; $h(0) = g(0) + 0 = \exp(0) = \underline{1}$.

W ten sposób mamy, że $g(z) = 1-z$, więc

(*) $\exp(-f(z)) = 1-z$. dla $|z|<1$

Widzimy więc, że dla $z \in \mathbb{R}$ $f(z) = -\ln(1-z)$.

Dla $z \in \mathbb{C}$ exp nie jest różnowartościowa, więc i logarytm nie jest zdefiniowany jednoznacznie. (ale jest dokładnie jedna funkcja ciągła na $\mathbb{C} \setminus \{-t : t \in \mathbb{R}_+\}$ spełniająca (*) i przyjmująca dla $z \in (0,\infty)$ wartości rzeczywiste).

<u>Zadanie</u>: Wykazać, że funkcja $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna na półprostej $(1,\infty)$.