Zadania kombinatoryczne

1. Udowodnij, dobierając odpowiedni argument kombinatoryczny, że:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

2. Udowodnij, dobierając odpowiedni argument kombinatoryczny, że

$$n \cdot \binom{m}{n} = m \cdot \binom{m-1}{n-1}$$

$$n \cdot \binom{m}{n} = (m-n+1) \cdot \binom{m}{n-1}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m}{n}\binom{m-1}{n-1}$$

$$\binom{m}{n} = \frac{m!}{n!(m-n)!}$$

$$\binom{m}{n}\binom{n}{k} = \binom{m}{k}\binom{m-k}{n-k}$$

3. Udowodnij, dobierając odpowiedni argument kombinatoryczny, że

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0 \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} = n \cdot 2^{n-1} \quad \text{dla} \quad n \geqslant 1$$

$$\sum_{j=0}^{k} \binom{m}{j} \binom{n}{k-j} = \binom{m+n}{k}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{k+n}{n} = \binom{m+n+1}{n+1}$$

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} = \binom{n+1}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$$

4. Udowodnij, dobierając odpowiedni argument kombinatoryczny, że

$$\sum_{k=0}^{n} k(n-k) = \binom{n+1}{3}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 4^n$$

5. Wykaż, że

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}$$

6. Wyznacz liczb dróg prowadzących po liniach kratowych w prostokącie o rozmiarach $m \times n$, łączących punkt $(0,0)$ z punktem (m,n).