Zadania z algebry liniowej

1. Znajdź rozwiązanie ogólne następujących układów równań:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 2 \\ 2x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 4 \\ 4x_1 + 13x_2 + 11x_3 + 12x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 1 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 3 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -7 \\ 9x_1 + 6x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 2 \end{cases}$$

2. Dla jakich wartości parametru s następujący układ równań jest niesprzeczny?

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = s \end{cases}$$

3. Wyznaczyć współczynniki wielomianu $w(x)$ najniższego stopnia, który spełnia warunki $w(0) = -1$, $w(1) = 1$, $w(2) = 0$, $w(-2) = 1$.

4. Zbadać, dla jakich wartości parametru t wektor $(1, 1, t)$ jest kombinacją liniową wektorów $(2, 1, 3)$, $(1, 2, 4)$, $(3, 0, 2)$, $(2, -2, -2)$.

5. Wyznaczyć wymiar podprzestrzeni $\mathrm{lin}((1, 2, 0, 1), (2, 1, 3, 3), (0, -3, 3, 1), (3, 4, 3, 4)) \subset \mathbb{R}^4$.

6. Znaleźć bazę podprzestrzeni $V \subset \mathbb{R}^4$ opisanej układem równań:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

7. Opisać podprzestrzeń $W = \mathrm{lin}((1, 2, 1, 3), (2, 5, 2, 7), (1, 3, 1, 4)) \subset \mathbb{R}^4$ za pomocą układu równań liniowych.

8. Znaleźć wspólrzędne wektora $w = (1, 8, 10, 10)$ w bazie $v_1 = (1, 2, 3, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 3)$, $v_3 = (-1, 1, 0, -1)$, $v_4 = (0, 0, 1, 2)$.

9. Wyznaczyć wzór przekształcenia liniowego $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, które spełnia warunki $\varphi(5, 1) = (2, 5, 1, 1)$, $\varphi(1, 0) = (3, 4, 2, 2)$.

10. Niech przekształcenie liniowe $\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ będzie dane wzorem

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + 4x_3, -3x_1 + 8x_3).$$

Znaleźć macierz $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, jeśli $\mathcal{A} = \{(3,4,1),(2,3,1),(5,1,1)\}$ and $\mathcal{B} = \{(3,1),(2,1)\}$.

11. Rozważmy trzy bazy na płaszczyźnie $\mathbb{R}^2$: $\mathcal{A} = \{(2,1),(1,1)\}$, $\mathcal{B} = \{(1,3),(0,1)\}$, $\mathcal{C} = \{(0,1),(1,4)\}$. Znaleźć $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$, jeśli wiadomo, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

12. Załóżmy, że $M(\varphi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ oraz $M(\psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}$, gdzie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ są bazami z zadania 11. Wyznaczyć $M(\varphi \circ \psi)_{\mathcal{A}}^{\mathcal{B}}$ oraz $M(\psi \circ \varphi)_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}$.

13. Wyznaczyć macierze odwrotne do następujących macierzy:

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 3 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

14. Obliczyć wyznaczniki macierzy $A \cdot B$, $A - 2B$, A^3, $A^2 \cdot B^{-2}$, jeśli

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 & 6 \\ 1 & 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

15. Dla każdego z poniższych pezkształceń liniowych znaleźć wartości własne oraz bazy odpowiadających im podprzestrzeni własnych:

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 + 3x_2), \quad \psi(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2x_1 + 4x_2, 5x_1 + 3x_2, x_3 + x_4, 3x_3 - x_4).$$

16. Dla następujących macierzy A zbadać, czy istnieje macierz C taka, że $C^{-1}AC$ jest macierzą diagonalną:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

17. Dla następujących macierzy A obliczyć A^{2010}:

$$\begin{bmatrix} 1 & -8 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & -11 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$