Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka
Zadania przygotowawcze przed kolokwium

UWAGA - Po zrobieniu tych zadań nie należy uważać się za całkowicie przygotowanego do kolokwium, zbiór tych zadań nie pokrywa całej wiedzy i umiejętności, które warto mieć.

1. Klasa liczy 20 uczniów, na każdej lekcji do odpowiedzi losowany jest dokładnie jeden uczeń. Oblicz prawdopodobieństwo, że w ciągu 21 lekcji każdy uczeń będzie przepytany.

2. Z talii 24 kartowej losujemy 5 kart bez zwracania. Oblicz prawdopodobieństwo, że wylosowaliśmy dokładnie 3 asy, jeśli wiadomo, że

- mamy co najmniej jednego asa
- mamy asa czarnego koloru
- mamy asa pik
- pierwszą wylosowaną kartą jest as
- pierwszą wylosowaną kartą jest czarny as
- pierwszą wylosowaną kartą jest as pik

3. Wśród 65 monet jest jedna z dwoma orłami. Rzucamy wybraną losowo monetą 6 razy, za każdym razem wypadł orzeł. Jakie jest prawdopodobieństwo, że była to moneta z dwoma orłami?

4. Test na pewną chorobę, którą dotknięta jest jedna na tysiąc osób u osoby chorej zawsze daje odpowiedź pozytywną, zaś u osoby chorej w pięciu procentach przypadków daję (niepoprawną) odpowiedź pozytywną. Jakie jest prawdopodobieństwo, że osoba, u której test dał odpowiedź pozytywną jest faktycznie chora?

5. Pokazać, że jeśli zdarzenia A i B są niezależne, to $\overline{A}$ i $\overline{B}$ (czyli dopełnienia tych zdarzeń) też są niezależne (należy to zrobić formalnie z definicji, bo intuicyjnie jest to dość jasne).

6. Pokazać, że jeśli zmienne losowe X i Y mają oba rozkład geometryczny (niekoniecznie z tym samym parametrem) oraz są niezależne, to zmienna $Z = \min(X, Y)$ ma również rozkład geometryczny (również to należy zrobić formalnie).

7. Niech zmienne losowe X i Y będą niezależne oraz mają rozkład Poissona z parametrem 8. Niech $Z = 2^X$, $W = 2^{2X-3Y}$. Oblicz wartość oczekiwaną oraz wariancję zmiennych Z i W.

8*. Funkcje tworzące prawdopodobieństwa mają ładną własność, mianowicie jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to wówczas $f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t)$. Wykaż, że nie jest prawdą twierdzenie odwrotne, czyli, że istnieją takie zmienne losowe X i Y, że $f_{X+Y}(t) = f_X(t)f_Y(t)$, a mimo wszystko X i Y są zależne.
Wskazówka Wystarczy znaleźć takie X i Y (zależne), że ich suma $Z = X + Y$ będzie przyjmowała poszczególne wartości $k \in \mathbb{N}$ z takimi samymi prawdopodobieństwami, z jakimi przyjmowałaby, gdyby X i Y były niezależne. Warto poszukać wśród małych przykładów.

9. Niech $X \sim \mathcal{N}(a, \sigma^2)$. Czy istnieją takie $s, t \in \mathbb{R}$, że $X = sY + t$, że $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$, jeśli tak, to jakie?

10. Niech $p, s > 0$. Wykazać, że wówczas prawdziwa jest nierówność

$$\mathbb{P}(|X| \geqslant s) \leqslant \frac{\mathbb{E}|X|^p}{s^p}.$$

11. W klasie jest 30 osób, wszyscy urodzeni w tym samym roku. Obliczyć prawdopodobieństwo, że wszyscy urodzą się w różnych dniach, zakładamy, że ilość dni w roku to 366 (oszacować tę liczbę). Obliczyć wartość oczekiwaną liczby osób, które nie będą miały towarzystwa w swoim dniu. Oszacować jak najlepiej prawdopodobieństwo, że osób tych będzie mniej niż 20.