

Nierówności Chernoffa

Są tu zebrane wszystkie razem nierówności Chernoffa (to znaczy wersje nierówności Chernoffa), które pojawiły się na wykładzie. Nierówności Chernoffa nie należy pamiętać, należy jednak pamiętać, a przynajmniej warto, że są takie i że przydają się jeśli mamy do czynienia z pewnymi szczególnymi przypadkami. Wtedy są to bardzo mocne nierówności - praktycznie najlepsze oszacowania, które możemy napisać.

Jeżeli X jest zmienną losową będącą sumą niezależnych zmiennych Bernoulliego (ale niekoniecznie o tym samym p , czyli czymś więcej niż zmienną o rozkładzie dwumianowym), to

$$\mathbb{P}(X \geq (1+d)\mathbb{E}X) \leq \left(\frac{e^d}{(1+d)^{1+d}} \right)^{\mathbb{E}X}.$$

Wniosek z tej nierówności to:

$$\mathbb{P}(X \geq (1+d)\mathbb{E}X) \leq e^{-\frac{\mathbb{E}X d^2}{3}}$$

dla $0 < d < 1$.

Mamy też podobną nierówność w drugą stronę

$$\mathbb{P}(X \leq (1-d)\mathbb{E}X) \leq \left(\frac{e^{-d}}{(1-d)^{1-d}} \right)^{\mathbb{E}X}.$$

oraz wniosek z niej (uwaga, tu jest 2, a nie 3 jak poprzednio):

$$\mathbb{P}(X \leq (1-d)\mathbb{E}X) \leq e^{-\frac{\mathbb{E}X d^2}{2}}.$$

Z drugiej i czwartej nierówności wynika wniosek (dla $0 < d < 1$):

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq d\mathbb{E}X) \leq 2e^{-\frac{\mathbb{E}X d^2}{3}}.$$

Należy zwrócić uwagę, że te wszystkie nierówności możemy stosować tylko, gdy X jest pewnej szczególnej postaci!!!