Seria 8. Warunkowa Wartość Oczekiwana

1. Niech $Y \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, $\mathcal{F}$-σ ciało, $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Udowodnij, że dla każdej zmiennej losowej $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$
$$\mathbf{E}(X-Y)^2 \geqslant \mathbf{E}(Y - \mathbf{E}(X|\mathcal{F}))^2.$$

2. Znajdź rozkład warunkowy X pod warunkiem $X+Y=t$, gdzie X, Y są niezależne z rozkładu: a) $\mathcal{N}(0,\lambda^2)$; b) $\mathcal{E}(\lambda)$; c)$\mathcal{P}(\lambda)$.

3. Zmienna (X,Y) ma gęstość $f_{(X,Y)}(x,y) = \frac{x^3}{2}e^{-x(y+1)}1_{x>0,y>0}$. Wyznacz $\mathbf{E}(Y|X)$ oraz $\mathbf{E}(Y^2|X)$

4. Zmienna losowa (X,Y) ma rozkład gaussowski o wartości oczekiwanej 0 oraz $\mathbf{Var}X_1 = \sigma_1^2$, $\mathbf{Var}X_2 = \sigma_2^2$, $\mathbf{Cov}(X,Y) = c$. Oblicz $\mathbf{P}(Y \in B|X)$ oraz $\mathbf{E}(Y|X)$.

5. Zmienne X, Y są niezależne i mają rozkład wykładniczy. Oblicz $\mathbf{E}(\sin X|X+Y)$.

6. Rozważmy zmienne $W_0, W_1, ..., W_n, ...$ o jednakowym rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną μ. Niech N będzie zmienną losową o rozkładzie Poissona z wartością oczekiwaną λ, niezależną od $W_0, W_1 ..., W_n, ...$ Oblicz dystrybuantę rozkładu p-stwa zmiennej losowej
$$Y = \min(W_0, W_1 ..., W_N).$$

7. Załóżmy, że $U_0, U_1, ..., U_n, ...$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Oblicz warunkową wartość oczekiwaną
$$\mathbf{E}(\max\{U_0, U_1 ..., U_n\}|U_0).$$

8. Niech $Z_1, Z_2, ..., Z_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Pareto o gęstości
$$p_{\lambda,\theta}(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\theta \theta}{(x+\lambda)^{\theta+1}}, & \text{dla } x > 0 \\ 0, & \text{dla } x \leqslant 0, \end{cases}$$
gdzie $\theta > 1$, $\lambda > 0$ są ustalonymi liczbami. Wyznacz
$$\mathbf{E}(Z_1 + Z_2 + ... + Z_n| \min(Z_1, Z_2, ..., Z_n) = t).$$

9. Niech $X_1, X_2, ..., X_n$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie zadanym gęstością:
$$f(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{gdy } x \in [0,1] \\ 0, & \text{gdy } x \notin [0,1] \end{cases}$$
Wyznacz
$$\mathbf{E}(X_1 + X_2 + ... + X_n| \max(X_1, X_2, ..., X_n) = t),$$
gdzie t jest ustaloną liczbą z przedziału $[0,1]$.

10. Rzucamy 12 razy symetryczną monetą. Niech X_4 oznacza liczbę sukcesów w pierwszych czterech rzutach a X_{12} liczbę sukcesów we wszystkich dwunastu rzutach. Oblicz
$$\mathbf{E}\mathbf{Var}(X_4|X_{12}).$$

11. Losujemy ze zwracaniem po jednej karcie do gry z talii 52 kart tak długo aż wylosujemy pika. Niech Y oznacza zmienną losową równą liczbie wyciągniętych kart, a X zmienną losową równą liczbie kart, w których uzyskaliśmy karo. Oblicz $\mathbf{E}(Y|X=4)$.

12. Zmienne losowe U i V są niezależne i mają rozkłady jednostajne na przedziale $(0,2)$. Niech $X = \max\{U,V\}$ i $Y = \min\{U,V\}$. Oblicz $\mathbf{Cov}(X,Y)$.

13. Niech $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ będą niezależnymi dodatnimi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym o wartości oczekiwanej a. Niech N, M będą zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona niezależnymi od siebie i od zmiennych $X_1, X_2, ..., X_n, ...$, przy czym $\mathbf{E}N = \lambda$, $\mathbf{E}M = \mu$. Niech

$$Y_n = \begin{cases} \max\{X_1, X_2, ..., X_n\}, & \text{gdy } n > 0 \\ 0, & \text{gdy } n = 0 \end{cases}$$

Oblicz $\mathbf{P}(Y_{M+N} > Y_M)$.