Seria 6. CTG

1. Niech $X, X_1, X_2, ...,$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi $\mathbf{E}X = 0$, $\mathbf{Var}X = 1$, $X_{k,n} = X_k/\sqrt{n}$ wówczas $(X_{k,n})_{k=1}^n$ spełnia warunek Lindeberga.

2. Pokaż, że warunek Lapunowa, dla wszystkich k, n dla pewnego $\delta > 0$ zachodzi $\mathbf{E}|X_{k,n}|^{2+\delta} < \infty$ oraz
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^{r_n} \mathbf{E}|X_{k,n} - m_{k,n}|^{2+\delta} = 0,$$
gdzie $m_{k,n} = \mathbf{E}X_{k,n}$, $\sigma_{k,n}^2 = \mathbf{Var}X_{k,n}$ oraz $\sigma^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{k,n}^2$.

3. Niech $X, X_1, X_2, ...,$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi takimi, że $|X_k| \leqslant K < \infty$, $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^{r_n} \sigma_{k,n}^2 \to \infty$, to ciąg $(X_{k,n})_{k=1}^n$ spełnia warunek Lindeberga.

4. Na poczcie pojawia się 100 klientów dziennie, każdy z nich dokonuje wpłaty (lub wypłaty), X_i, $i = 1, 2, ..., 100$, gdzie X_i są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie, $\mathbf{E}X_i = 0$, $\mathbf{Var}X_i = 100^2$. Ile trzeba mieć gotówki w kasie rano by z p-stwem $0,99$ pod koniec dnia nie zabrakło pieniędzy.

5. Rzucono 1000 razy kostką. Znaleźć przybliżenie, że suma oczek będzie między 3410 a 3590.

6. Oblicz $\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!}$.

7. Zmienna losowa X_n ma rozkład $\chi^2(n)$. Pokaż, że $\frac{X_n - n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{*} \mathcal{N}(0, 1)$.

8. Zmienne X_i, $i \geqslant 1$ są niezależne o tym samym rozkładzie, nadto $X_i > 0$ oraz $\mathbf{E}X_i = 1$. Zbadaj słabą zbieżność
$$Y_n = (X_1 ... X_n)^{\frac{1}{n}}.$$

9. Zmienne X_i, $i \geqslant 1$ są niezależne, nadto
$$\mathbf{P}(X_k = 1) = \mathbf{P}(X_k = -1) = \frac{1}{2}(1 - k^{-2}), \ \ \mathbf{P}(X_k = k) = \mathbf{P}(X_k = -k) = \frac{1}{2}k^{-2}.$$
Pokaż, że CTG jest spełnione ale $S_n/\sqrt{n} \xrightarrow{*} \mathcal{N}(0, 1)$ ale $n^{-1} \sum_{k=1}^n \mathbf{Var}X_k \to 2$.

10. Pokaż, że dla X_λ, z rozkładu Poissona $\mathcal{P}(\lambda)$ zachodzi $(X_\lambda - \lambda)/\sqrt{\lambda} \xrightarrow{*} \mathcal{N}(0, 1)$, gdy $\lambda \to \infty$.

11. Udowodnij wzór Stirlinga: niech X_i niezależne z $\mathcal{P}(1)$, $S_n = X_1 + ... + X_n$,
    - $\mathbf{E}(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})_- = e^{-n} \sum_{k=0}^n \frac{n-k}{\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} = \frac{e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}}{n!}$;
    - $(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})_- \xrightarrow{*} \mathcal{N}_-$, gdzie $\mathcal{N} \sim \mathcal{N}(0, 1)$;
    - $\mathbf{E}(\frac{S_n - n}{\sqrt{n}})_- \to \mathbf{E}\mathcal{N}_- = \frac{1}{2\pi}$;
    - $n! \sim \sqrt{2\pi} e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}}$.

12. Niech X spełnia dwa warunki:
    - $\mathbf{E}X^2 < \infty$
    - X, Y, Z niezależne o tym samym rozkładzie to X ma ten sam rozkład co $\frac{Y+Z}{\sqrt{2}}$.

    Pokaż, że X ma rozkład $\mathcal{N}(0, 1)$.