Seria 5. Funkcje charakterystyczne

1. Udowodnij, że $\varphi(t) = e^{-|t|^p}$ nie jest funkcją charakterystyczną dla $p > 2$.

2. Pokaż, że $\varphi(x) = \frac{2}{1+e^{x^2}}$ nie jest funkcją charakterystyczną.

3. Załóżmy, że rozkład (X, Y, Z) jest skupiony na sferze o promieniu 1. Pokaż, że jeśli dla dowolnego wektora (α, β, γ) rozkład $\alpha X + \beta Y + \gamma Z$, gdzie $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ jest jednostajny na odcinku $[-1, 1]$ to rozkład (X, Y, Z) jest jednostajny.

4. Niech $X_1, X_2, ...$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie jednostajnym na $[-1, 1]$. Definiujemy
$$Y_n = \frac{\mathrm{sgn} X_n}{|X_n|^{1/\alpha}}.$$
Udowodnij, że ciąg
$$Z_n = \frac{Y_1 + Y_2 + ... + Y_n}{n^{1/\alpha}}$$
jest zbieżny według rozkładu i wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu granicznego.

5. Udowodnij, że słaba granica ciągu miar gaussowskich jest miarą gaussowską. Pokaż, że jeśli $(\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2))_{n=1}^{\infty}$ jest słabo zbieżny do $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, to $m_n \to m$, $\sigma_n^2 \to \sigma^2$.

6. Rzucamy monetą dla której p-stwo wypadnięcia orła wynosi p, aż do momentu, gdy uzyskamy n orłów. Niech X_p oznacza liczbę rzutów, pokaż, że $2pX_p$ jest zbieżny według rozkładu.

7. Niech X będzie zmienną losową o funkcji charakterystycznej φ_X. Udowodnij, że następujące warunki są równoważne:
   - Istnieje $a \neq 0$, że $|\varphi_X(a)| = 1$.
   - Istnieją $b, c \in \mathbb{R}$ takie, że zmienna X jest skoncentrowana na zbiorze $\{ck + b : k \in \mathbb{Z}\}$.

8. Niech $(X_n)_{n=1}^{\infty}$, $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$. Wykaż, że szereg $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} X_n$ jest zbieżny i wyznaczyć rozkład graniczny sumy.

9. Dla $a \in \mathbb{R}$, niech
$$\varphi_a(t) = \begin{cases} 1 + a|x| & \text{jeśli } |x| \leqslant 1 \\ 1 + a & \text{jeśli } |x| > 1 \end{cases}$$
Dla jakich wartości $a \in \mathbb{R}$, funkcja φ_a jest f. char. pewnego rozkładu.

10. Udowodnij, że ciąg μ_n jest jędrny wtedy i tylko wtedy, gdy φ_{μ_n} są jednakowo ciągłe w zerze.

11. Udowodnij, że jeśli φ ma własność, że dla każdego n istnieje φ_n, taka że $\varphi = (\varphi_n)^n$, to φ^{α}, $\alpha > 0$ jest funkcją charakterystyczną.